GUÍA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

GEOMETRÍA

PERIODO 2 GRADO: 11

ELABORACIÓN

PROFESOR: GILBERTO RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ
Lic. en Matemáticas.
Facultad de Educación Universidad Católica de Oriente. (UCO)
Magister en Ciencias y Matemáticas. Escuela de ingeniería, Sistema de formación Avanzada.
Universidad Pontificia Bolivariana (UPB)

OBJETOS DE CONOCIMIENTO: PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

ESTÁDARES:

- Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, esféricos, etc.)
- Resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas de manera algebraica.

LOGROS ESPERADOS:

- Manipular materiales cono escuadras, cuerdas y hojas para obtener el lugar geométrico llamado parábola.
- Explicar qué tipo de lugar es una parábola.
- Identificar los elementos básicos de una parábola.
- Deducir las ecuaciones básicas de la parábola, de acuerdo con su posición en el plano.
- Identificar la ecuación general de la parábola.
- Hallar los elementos básicos de una parábola, dada su ecuación general

INDICADORES DE LOGROS:

- Construye una parábola utilizando elementos como escuadra, papel y lápiz, siguiendo las instrucciones de construcción.
- Enuncia y explica con sus palabras el concepto formado acerca de parábola.
- Dados los elementos de una parábola, dibuja su gráfica.
- Dada la gráfica de una parábola, identifica sus elementos básicos.
- Deduce ecuación básica y general de una parábola dados sus elementos básicos.
- Dada la ecuación general de una parábola, deduce sus elementos.

CONTENIDOS:

- La parábola: definición.
- Elementos de la parábola.
- Ecuación de la parábola.

- Ecuación general
- Aplicaciones de la parábola.

PROCESO METODOLÓGICO

El desarrollo de esta asignatura se llevara a cabo mediante las siguientes prácticas metodológicas.

- ✓ Cada estudiante con apoyo de guía diseñada por el docente, realiza lectura compresiva de la teoría propuesta. El docente refuerza conceptos mostrando algunos ejercicios y acompañando los talleres en clase.
- ✓ Consulta sugeridas usando el blog, observación de videos y realización de evaluaciones en línea.
- ✓ Lectura interpretativa de las guías propuestas para cada tema.
- ✓ Explicación individual
- ✓ Trabajos en equipos
- ✓ Consultas
- ✓ Realización de talleres en clase.
- ✓ Trabajos prácticos.
- ✓ Solución de ejercicios.
- ✓ Solución de problemas de aplicación.
- ✓ Solución de inquietudes temáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Uribe, J. (2002). Matemática Experimental. (2 da. Edc.). Uros editores.

Londoño, N. y Guarín, H. (1998). Dimensión matemática 11. Bogotá: Editorial Norma

PERÍODO 2

OBJETOS DE CONOCIMIENTO: PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

ORIENTACIÓNES GENERALES.

La construcción del concepto de parábola se iniciará con la elaboración de un gráfico que ilustre la definición de este lugar geométrico, con lo cual se pretende que el estudiante observe la parábola y su forma básica, formándose una idea clara de ella.

Se definirá formalmente la parábola como lugar geométrico mostrando cada uno de los elementos, realizando una gráfica en el plano cartesiano.

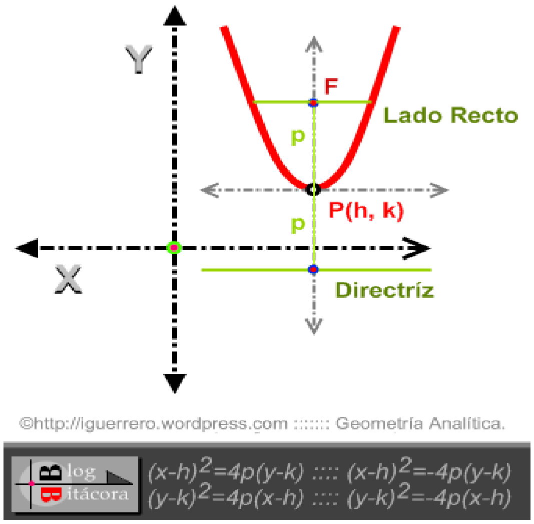
Con los elementos de la parábola se deducirá la ecuación básica y general. Este proceso se reforzará con ejemplos y ejercicios orientados en la presente guía. Para ello es fundamental un proceso de lectura compresiva y repaso diario de los temas tratados y explicado en dicha guía.

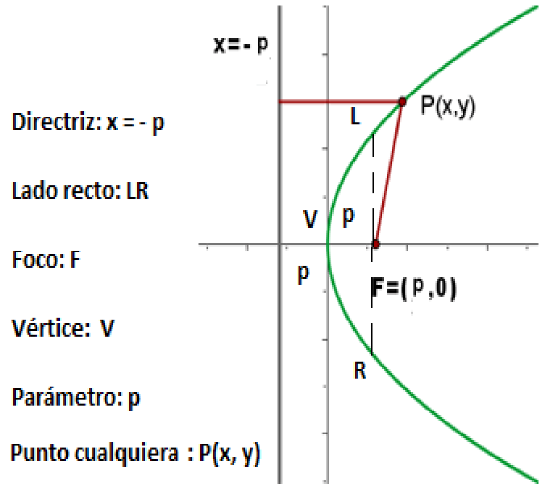
En la formación intelectual se considera la descripción del contenido y desarrollo teórico de cada tema para los cuales se propone una actividad correspondiente. Es decir, la guía está dividida por temas y cada uno de ellos contiene una orientación psicomotriz compuesta por una actividad para ser desarrollada en clase.

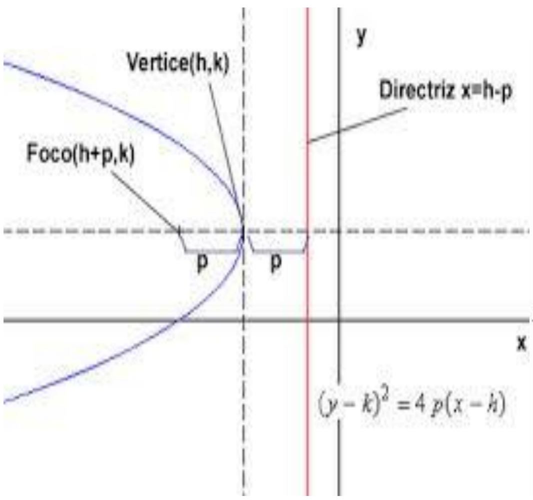
Como estrategia adicional, se han creado videos con las explicaciones del tema, los cuales se pueden consultar en el blog de geometría analítica, al finalizar cada una de las temáticas se debe responder la evaluación en línea y así evidenciar los aprendizajes alcanzados.

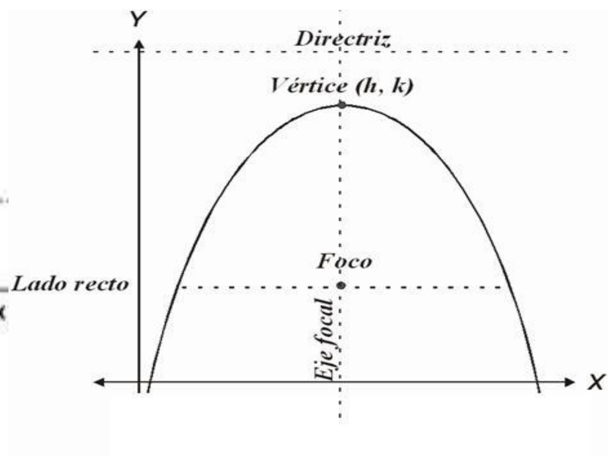
CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS.
TEMA 1. DEFINICIÓN DE PARÁBOLA

Definición: una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo en el plano llamado y que no pertenece a la recta.









ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

Foco: punto fijo mencionado en la definición. (F)

Vértice: (V) punto donde el eje focal corta la parábola.

Distancia focal: es la distancia dirigida del vértice al foco y del foco a la directriz, se denota por **p**.

Lado recto: (LR) segmento perpendicular al eje focal, que pasa por el foco F, cuyos extremos son dos puntos de la parábola

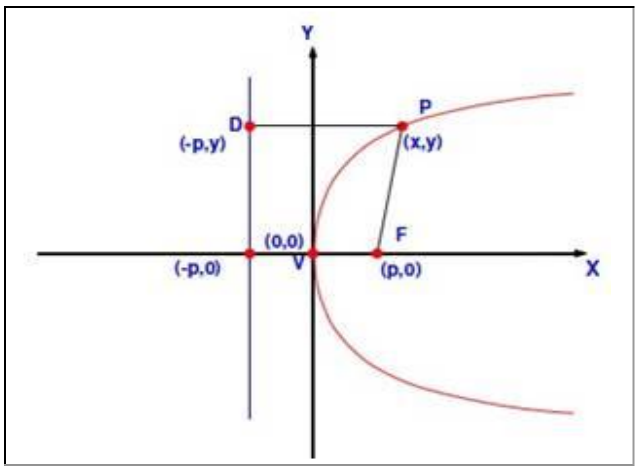
ECUACIONES DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN

Los procesos se pueden consultar en:
http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Ecuacion_parabola.html.

Estudiaremos la **ecuación de la parábola** para los casos en que su vértice esté en el origen **(coordenadas (0, 0)** del **Plano Cartesiano)**, y según esto, tenemos cuatro posibilidades de ecuación y cada una es característica.

Para iniciar nuestra explicación empezaremos con la parábola cuyo vértice está en el origen, su eje focal o de simetría coincide con el eje de las X (abscisas) y que está orientada (se abre) hacia la derecha.

Por definición, sabemos que, en una parábola la distancia entre un **punto "P"** (no confundir con el **"parámetro p"**), cualquiera de coordenadas (x, y), y el foco "F" será igual a la distancia entre la directriz (D) y dicho punto, como vemos en la figura:



De lo anterior resulta:

$$\overline{PD} = \overline{PF}$$ (Distancia PD igual a la distancia PF)

El trazo PD nace en el **punto (x, y)** y termina en el **punto (–p, y)** y podemos usar la fórmula para calcular **distancia entre dos puntos**:

$$\overline{PD} = \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2}$$

$$\overline{PD} = \sqrt{(x+p)^2}$$

El trazo PF nace en el **punto (x, y)** y termina en el **punto (p, 0)**, y también podemos usar la fórmula para calcular la distancia entre ellos:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$
$$\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

Sustituyendo en la expresión de distancias $\overline{PD} = \overline{PF}$ resulta:

$$\sqrt{(x+p)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado y desarrollando, se tiene:

$\mathbf{(x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2}$

$\mathbf{x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2}$

$\mathbf{x^2 + 2px + p^2 - x^2 + 2px - p^2 = y^2}$

Simplificando términos semejantes y reordenando la expresión, se obtiene:

$$\boxed{\mathbf{y^2 = 4px}}$$

que es la **ecuación de la parábola en su forma básica o canónica**.

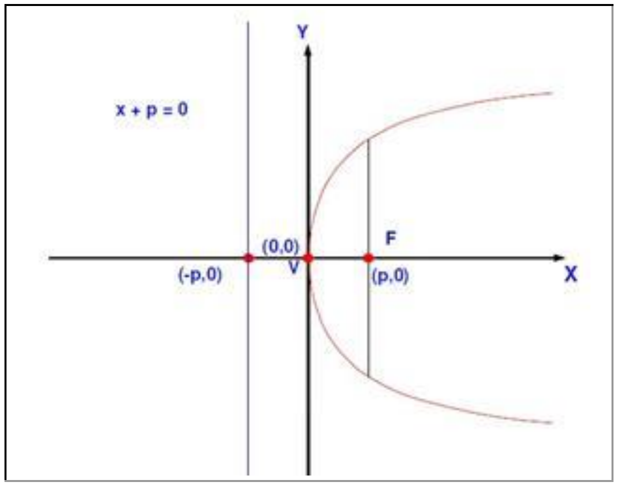
Esta ecuación tiene leves variaciones según sea la orientación de la parábola (hacia donde se abre).

Veamos ahora las cuatro posibilidades:

Primera posibilidad

La que ya vimos, cuando la **parábola se abre hacia la derecha (sentido positivo) en el eje de las abscisas "X"**

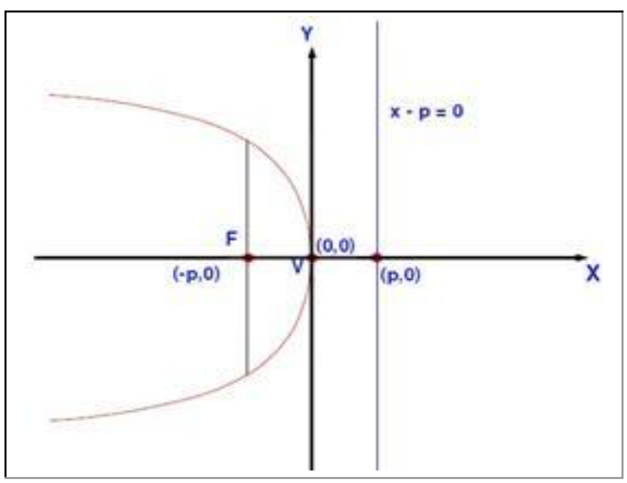
Ecuación de la parábola	$\mathbf{y^2 = 4px}$
Ecuación de la directriz	$\mathbf{x + p = 0}$



Segunda posibilidad

Cuando la parábola se abre hacia la izquierda (sentido negativo) del eje de las abscisas "X".

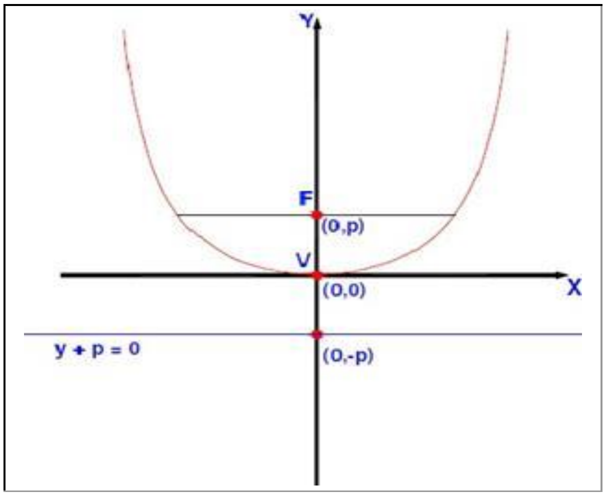
Ecuación de la parábola	$y^2 = -4px$
Ecuación de la directriz	$x - p = 0$



Tercera posibilidad

Cuando la parábola se abre hacia arriba (sentido positivo) en el eje de las ordenadas "Y".

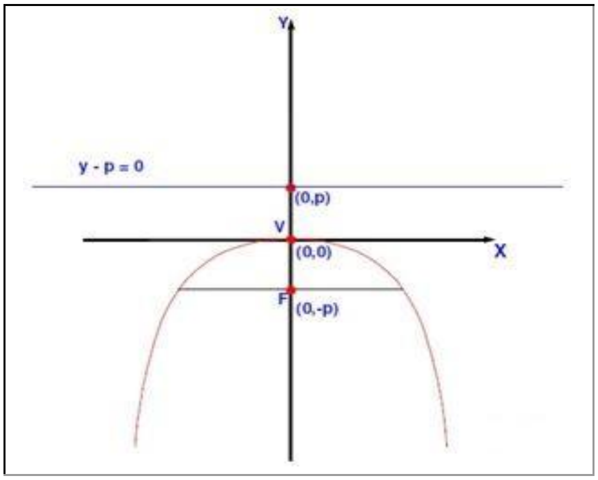
Ecuación de la parábola	$x^2 = 4py$
Ecuación de la directriz	$y + p = 0$



Cuarta posibilidad

Cuando la parábola se abre hacia abajo (sentido negativo) en el eje de las ordenadas "Y".

Ecuación de la parábola	$x^2 = -4py$
Ecuación de la directriz	$y - p = 0$



Información importante:

El **parámetro p** (que marca la distancia focal) señala la distancia entre el **foco** y el **vértice**, que es igual a la distancia entre el **vértice** y la **directriz**.

Si en la ecuación de la parábola la **incógnita x es la elevada al cuadrado**, significa que la curvatura de la misma se abre hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo del **parámetro p**.

Cuando el **parámetro p es positivo**, la parábola **se abre "hacia arriba"** y cuando es **negativo se abre "hacia abajo"**.

Ahora, si en la ecuación de la parábola la **incógnita y es la elevada al cuadrado**, la curvatura de la misma será hacia la derecha o hacia la izquierda. En este caso, cuando el **parámetro p es positivo**, la parábola se **abre "hacia la derecha"** y cuando es **negativo se abre "hacia la izquierda"**.

Longitud del lado recto (LR)

Tal como dedujimos la ecuación anterior, es posible deducir la ecuación que nos permita calcular la longitud del lado recto (cuerda que pasa por el foco, perpendicular al eje focal o de simetría):

No desarrollaremos el camino y sólo diremos, para recordar, que el **lado recto es igual a 4p**.

Ejemplo:

Obtener la **ecuación, el foco y la directriz** de la parábola con vértice en el origen y que contiene al punto B(3, 4), además su eje de simetría (o eje focal) es paralelo al eje X.

Resolución:

El punto B (3, 4) nos indica que

X = 3

Y = 4

Sustituyendo las coordenadas del punto B en la ecuación

$$y^2 = 4px$$

$$4^2 = 4p(3)$$

$$16 = 12p$$

$$p = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Entonces la ecuación será

$$y^2 = 4(\tfrac{4}{3})x$$

$$y^2 = \frac{16}{3}x$$

Y el Foco estará en el punto 4/3, 0

$$\mathbf{F} = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

Vemos que 4/3 corresponde al valor de p, y como la directriz está a la misma distancia de p respecto al vértice, pero hacia el lado contrario, entonces, la directriz será:

$$\mathbf{x} = -\frac{4}{3}$$

Ejemplo 2. Escribir la ecuación de la parábola con foco en (3,0) y la directriz la recta x= -3. Dibujar la gráfica.

Solución:

Los datos que se tienen son:

P= 3

V(0,0) y eje focal es el eje X, el cual está determinado por la ecuación de la directriz.

Por tanto, la ecuación es:

$y^2 = 4px$ Ecuación básica.

$y^2 = 4(3)x$ Reemplazando el valor de p.

$y^2 = 12x$

Graficamos usando una tabla de valores.

Ejemplo 3: Una parábola tiene s vértice en el origen, su eje focal es el eje x y pasa por el punto (-3,6). Hallar su ecuación y dibujar su gráfica.

Se tiene que su eje focal es el eje x y s u vértice es V(0,0), entonces corresponde a una ecuación de la forma $y^2 = 4px$

Para escribir la ecuación se debe conocer el valor de p.

Como la parábola pasa por el punto ((-3,6) entonces estas coordenadas deben satisfacer la ecuación básica planteada.

$y^2 = 4px$ Entonces reemplazando: $6^2 = 4p(-3)$

$\frac{36}{-3} = 4p$ Simplificando

$-12 = 4p$

$\frac{-12}{4} = p$

$-3 = p$

Luego se reemplaza el valor de p en la ecuación básica: $y^2 = 4(-3)x$

$y^2 = -12x$

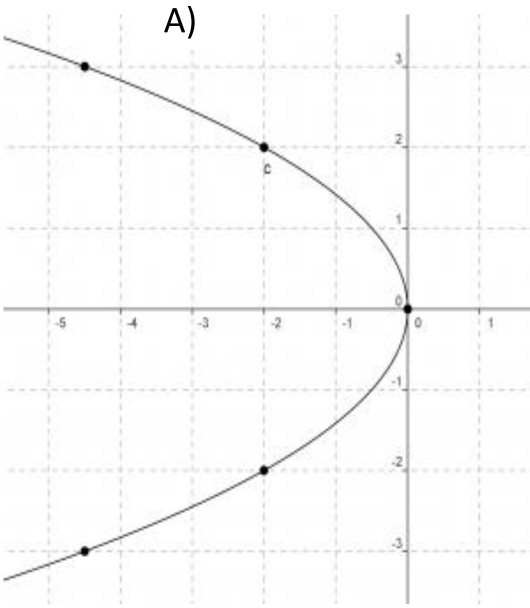
Como se ve el valor de p es negativo, entonces la parábola se abre hacia la izquierda del origen, y la ecuación de la directriz es x=3.

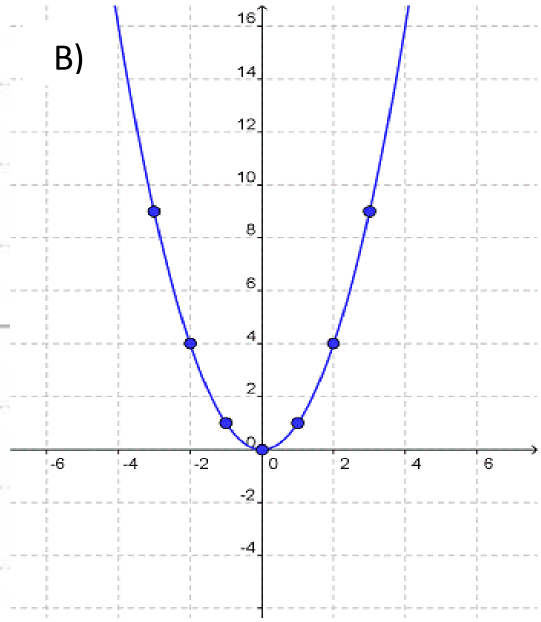
ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE
ACTIVIDAD 1.

1. Realiza una consulta donde muestres diversas aplicaciones de la parábola. Cada aplicación debe ser ilustrada con dibujos o imágenes, a manera de resumen. Elabora como producto un "**cuaderno didáctico".**

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE
ACTIVIDAD 2

1. En los siguientes ejercicios hallar las coordenadas del foco, las ecuaciones del eje focal y de la directriz. Dibujar la gráfica de dos de ellas.
   A) $y^2 = 12x$
   B) $x^2 = -16y$
   C) $8x - y^2 = 0$
   D) $20x + 5y^2 = 0$
2. Hallar la ecuación de la parábola mostrada en la gráfica.



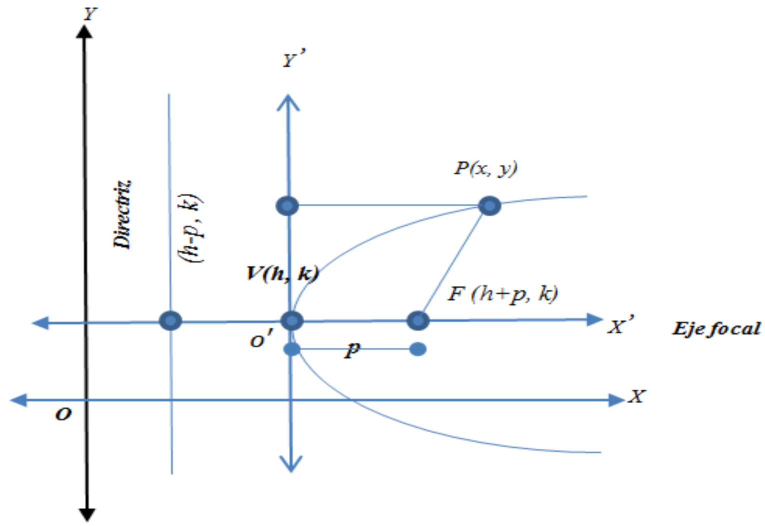


3. Hallar la ecuación de la parábola en cada caso:
   A) V(0,0), F(-2,0) y directriz x=2.
   B) V(0,0) y F(3,0)

CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS
TEMA 2: TRASLACIÓN DE EJES.

En oportunidades es necesario hallar la ecuación de una parábola cuyo vértice no está en origen y cuyo eje focal es paralelo a uno de los ejes coordenados.

En este caso hablamos de una parábola cuyo vértice es el punto de coordenadas *(h, k)* y la directriz es una recta paralela a los ejes rectangulares.



Si los ejes coordenados son traslados de tal manera que el nuevo origen o' coincida con el vértice (h, k), entonces la ecuación de la parábola con referencia al nuevo sistema de coordenadas rectangular X'Y' está dado por: $(y')^2 = 4p(x')$

En donde las coordenadas del foco F son (p,0) con respecto al nuevo sistema.

Sabemos que un punto P(x, y) en el sistema coordenado *XY* se expresa con el nuevo sistema coordenado por el par *(x'+h, y'+k)* mediante las ecuaciones de transformación: x= x'+ h, y= y'+ k

Si sustituimos los valores de x' y y' en la ecuación $(y')^2 = 4p(x')$, obtenemos la ecuación de la parábola de vértice V(h, k) y eje paralelo al eje x.

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

De forma similar, la ecuación de la parábola de vértice *V (h, k)* y eje paralelo al eje Y tiene por ecuación:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Definición: la ecuación de la parábola de vértice *V (h, k)*, eje paralelo al eje X y "***p***" como distancia dirigida del vértice al foco ($|p|$ $es\ la\ longitud\ del\ segmento\ del\ comprendido\ entre\ el\ vértice\ y\ el\ foco$), está dada por:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

Si el vértice es V (h, k) y el eje es paralelo al eje Y, entonces la ecuación es:

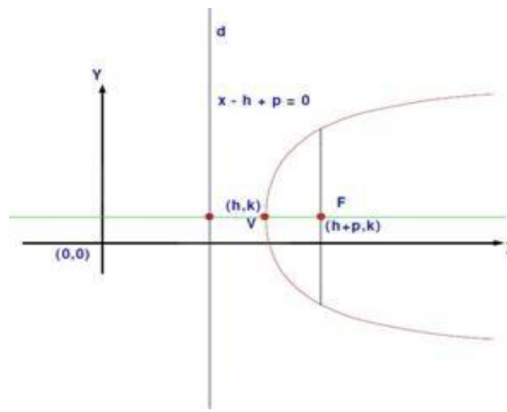
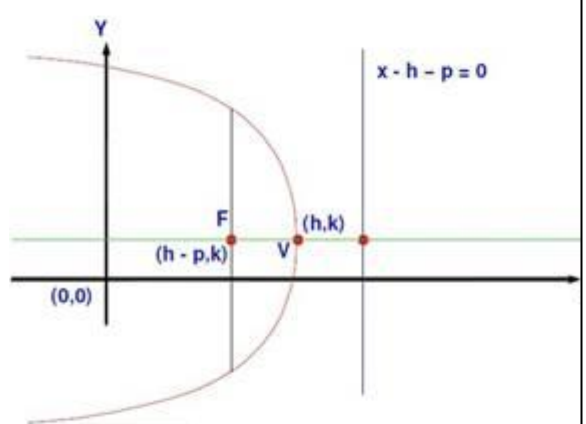
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

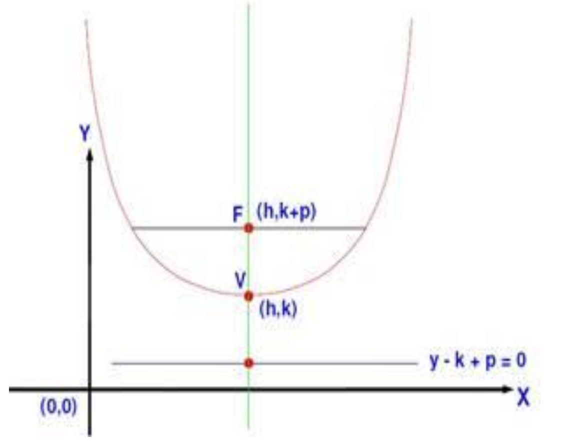
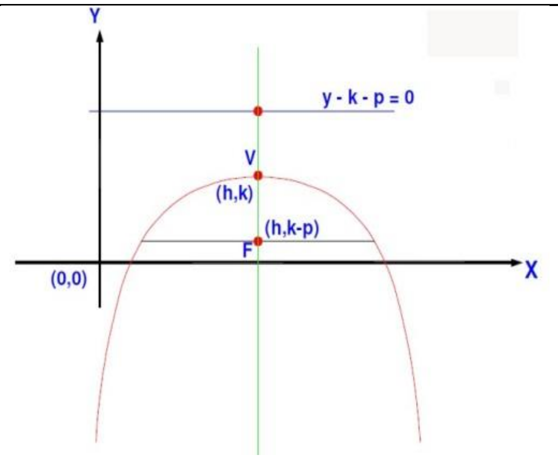
Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

La tiene eje paralelo al eje x, si las ordenadas del vértice y el foco son iguales.

La parábola tiene eje paralelo al eje y, si las abscisas del vértice y el foco son iguales.

En resumen:

Posibilidad	Ecuación	Gráfico
Primera posibilidad Que la parábola se abra hacia la derecha (sentido positivo) en el eje de las abscisas "X".	$\boldsymbol{Ecuación\ de\ la\ parábola}$: $\boldsymbol{(y - k)2 = 4p(x - h)}$ $\boldsymbol{Ecuación\ de\ la\ directriz}$: $\boldsymbol{x - h + p = 0}$	
Segunda posibilidad Que la parábola se abra hacia la izquierda (sentido negativo) del eje de las abscisas "X".	$\boldsymbol{Ecuación\ de\ la\ parábola}$ $\boldsymbol{(y - k)2 = -4p(x - h)}$ $\boldsymbol{Ecuación\ de\ la\ directriz}$ $\boldsymbol{x - h - p = 0}$	

Tercera posibilidad Que la parábola se abra hacia arriba (sentido positivo) del eje de las ordenadas "Y"	$\boldsymbol{Ecuación\ de\ la\ parábola}$ $\boldsymbol{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$ $\boldsymbol{Ecuación\ de\ la\ directriz}$ $\boldsymbol{y-k+p=0}$	
Cuarta posibilidad Que la parábola se abra hacia abajo (sentido negativo) del eje de las ordenadas "Y".	$\boldsymbol{Ecuación\ de\ la\ parábola}$ $\boldsymbol{(x-h)2 = -4p(y-k)}$ $\boldsymbol{Ecuación\ de\ la\ directriz}$ $\boldsymbol{y-k-p=0}$	

Ejemplo 1: hallar la ecuación de la parábola con vértice en V(-1, 2) y F(-1,5)

Solución:

El vértice y el foco están sobre el eje X= -1; luego, es paralelo al eje Y. Por tanto la ecuación es de la forma: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$Donde: V(h,k) = (-1,2)\ y\ F(h,k+p) = (-1,5)\ entonces\ p = 3$

La ecuación pedida es $(x+1)^2 = 4(3)(y-2)$= $(x+1)^2 = 12(y-2)$

Ejemplo 2: dada la ecuación $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$ hallar coordenadas del vértice, foco y eje focal.

Solución:

Se debe llevar la ecuación a su forma básica.

$y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$

$y^2 + 6y + 9 = 4x - 17 + 9$ Por qué____

$(y-3)^2 = 4x - 8$ Por qué____

$(y-3)^2 = 4(x-2)$ Por qué____

Según esto, cuáles serían las coordenadas del vértice y el foco y la ecuación de la directriz.

Ejemplo 3:

Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el punto (3, 2) y foco en (5, 2).

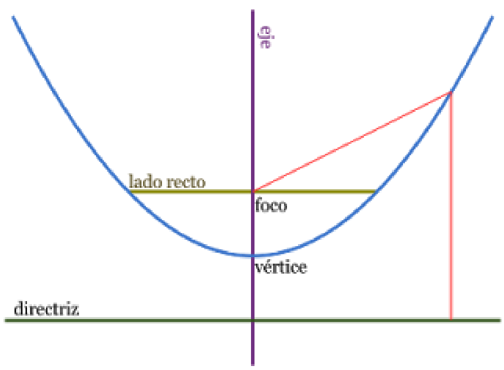
Al analizar las coordenadas de vértice (3, 2) y foco (5, 2), vemos que su ordenada es común (y = 2), por lo que se concluye que están alineados horizontalmente y que el foco está a la derecha del vértice.

Según ya vimos, en este caso la ecuación que resulte tiene la forma

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})\mathbf{2} = \mathbf{4}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})$$

Siendo las coordenadas del vértice *(h, k)*, se sustituyen en la ecuación y resulta:

$$(\boldsymbol{y} - \mathbf{2})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - \mathbf{3})$$



En donde el **parámetro p** representa la distancia del vértice al foco, que podemos calcular por diferencia de las abscisas correspondientes:

p = 5 – 3

p = 2

Sustituyendo:

$$(\boldsymbol{y} - \mathbf{2})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4}(\mathbf{2})(\boldsymbol{x} - \mathbf{3})$$

Queda

$$(\boldsymbol{y} - \mathbf{2})^{\mathbf{2}} = \mathbf{8}(\boldsymbol{x} - \mathbf{3}),$$

Ecuación escrita en la forma ordinaria o canónica.

Lado recto y excentricidad de la parábola.

Lado recto: es igual a cuatro veces la distancia focal, es decir; $LR: 4|p|$

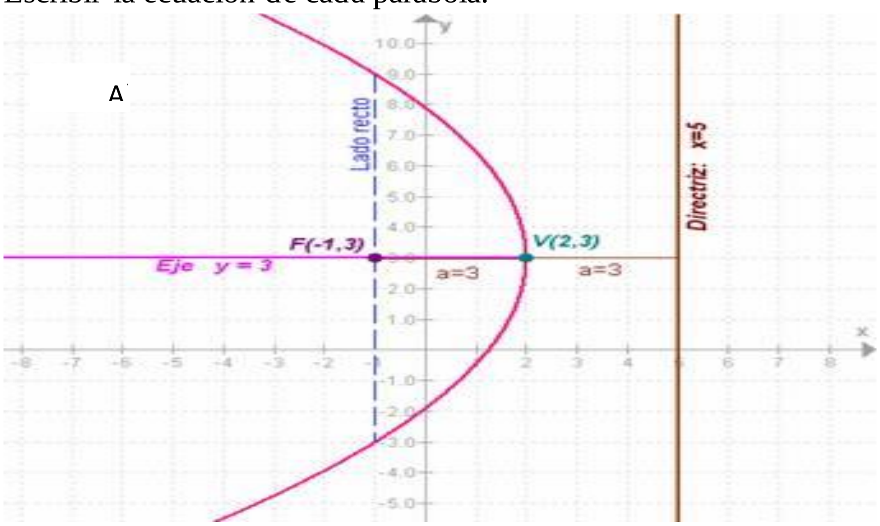
Excentricidad (*e*): está definida por el cociente de la distancia entre un punto P de la parábola y el foco y la distancia entre P y la directriz, que por definición son iguales:

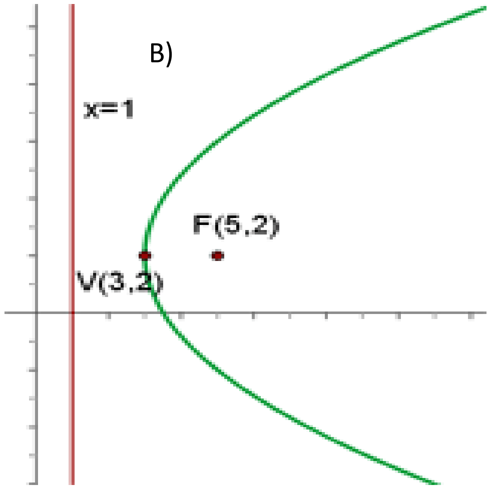
$$e = \frac{d(P,F)}{d(p, direcriz)} = 1$$

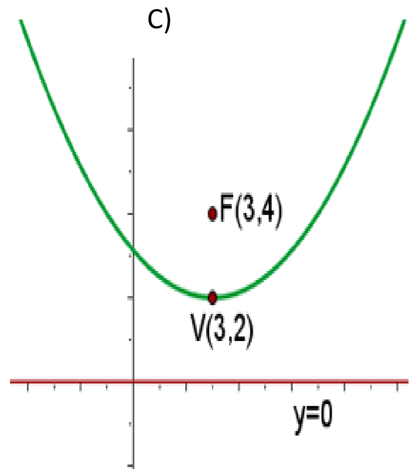
ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE
ACTIVIDAD 3.

1. Dados los vértices *V (h, k)* y el foco F, determinar la ecuación de la parábola y la ecuación de la directriz.
   A) V(1,2) y F(1,5)
   B) V(-2,5) y F(-1,5)
   C) V(-7,-6) y F(-5,-6)
   D) V(1,1) y F(1,2)
2. Determinar vértice, foco, ecuación de la directriz y eje de cada parábola.
   A) $(x-3)^2 = -12(y-1)$
   B) $(y-1)^2 = 20x$
   C) $(x-2)^2 = -16(y-3)$

3. Escribir la ecuación de cada parábola.







CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS
TEMA 3. ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA.

Partiendo de la ecuación básica $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ se desarrolla el binomio y el producto indicado, similar al proceso realizado en la obtención de la ecuación general de la circunferencia.

$(y-k)^2 = 4p(x-h) = y^2 + 2yk + k^2 = 4px - 4ph$ Prod. Notable y P. distributiva.

$y^2 + 2yk + 4px + k^2 + -4ph \quad = 0$ Organizando, igualando a cero.

$y^2 + \underbrace{2yk}_{A} + \underbrace{4px}_{B} + \underbrace{k^2 + -4ph}_{C} \quad = 0$ Simplificando valores numéricos.

$y^2 + Ay + Bx + C \quad = 0$ Ecuación general.

Ejemplo: dados el foco y la directriz de la parábola, escribir su ecuación general.

$$F(3{,}1)\ y\ x = 1$$

Solución:

Por sus características la parábola está abierta hacia la derecha, su ecuación corresponde a:

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})^2 = \boldsymbol{4p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})$$

$$\boldsymbol{Ecuación\ de\ la\ directriz}:$$

$$\boldsymbol{x - h + p = 0}$$

Por observación se podría concluir que el valor de p es 2 (ubicar los valores en el plano), o simplemente utilizar:

$\boldsymbol{x - h + p = 0}$

1-3+p=0

Despejando p-2=0 entonces p=2

Con esta información podemos escribir la ecuación de la parábola.

$\mathbf{(y - k)^2 = 4}\boldsymbol{p(x - h)}$

Donde $h = 3,\ k = 1\ y\ p = 2$

$\mathbf{(y - 1)^2 = 4(2)}\boldsymbol{(x - 3)}$ Reemplazando los valores dados.

$\mathbf{(y - 1)^2 = 8}\boldsymbol{(x - 3)}$

$\boldsymbol{y^2 - 2y + 1 = 8x - 24}$ Resolviendo el cuadrado del binomio y el producto indicado (P. distributiva)

$\boldsymbol{y^2 - 2y + 1 - 8x + 24 = 0}$ Igualando a cero.

$\boldsymbol{y^2 - 2y - 8x + 25 = 0}$ Se obtiene la ecuación general**.**

Según las características de cada parábola, se puede concluir que existen cuatro formas de ecuación general.

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE.
ACTIVIDAD 4.

1. Dados los elementos F y directriz, escribir la ecuación general de la parábola.
   A) F(-2,1) y x= 3
   B) F(4,3) y x=1
   C) F(-4,1), y= 4
   D) F(5,2), y= -1

CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS
TEMA 4: APLIACIONES DE LA PARÁBOLA.

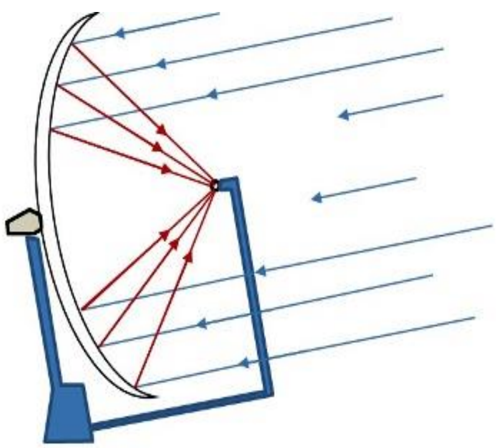
El principio de la parábola tiene múltiples aplicaciones:

- Cuando se lanza un proyectil, como una piedra o una pelota, su trayectoria es una parábola si no se consideran factores de menor importancia, como la resistencia del aire y giros del proyectil sobre sí mismo.

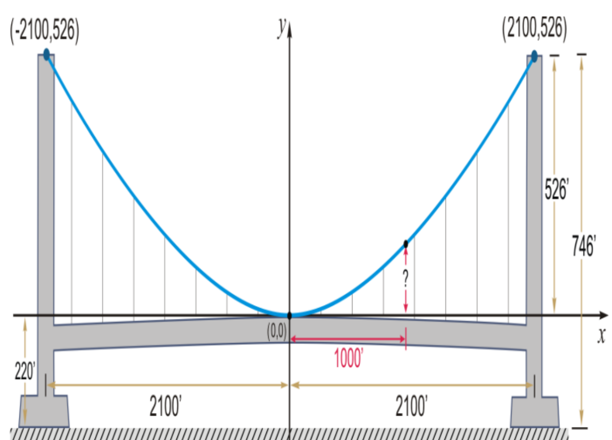
- En la construcción de algunos puentes se emplean arcos parabólicos. Las curvas que forman los cables que sostienen ciertos puentes suspendidos son aproximadamente una parábola, siempre que las cargas sobre el puente sean uniformes.
- Si se hace girar una parábola sobre su eje, se genera una superficie llamada paraboloide. Se emplea en reflectores.

FOGÓN SOLAR

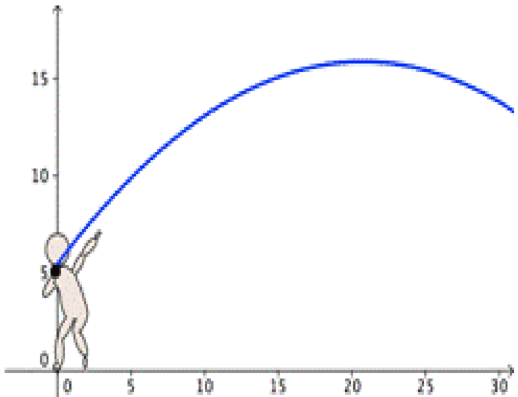
ANTENA



PRINCIPIO DE LA ANTENA



CONSTRUCCIÓN DE PUENTES



TIRO PARABÓLICO