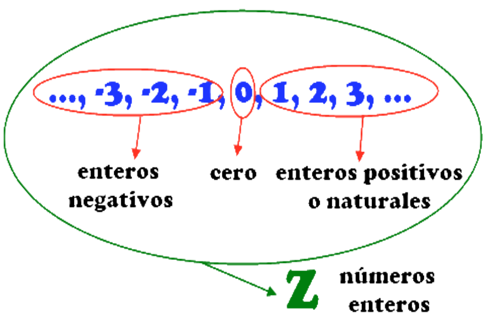
GUÍA DE TRABAJO 1. ÁREA DE MATEMÁTICAS GRADO 8. PERÍODO 1.

PROFESOR: GILBERTO RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ
Lic. en Matemáticas.
Facultad de Educación Universidad Católica de Oriente. (UCO)
Magister en Ciencias y Matemáticas. Escuela de ingeniería, Sistema de formación Avanzada.
Universidad Pontificia Bolivariana (UPB).

OBJETOS DE CONOCIMIENTO: Conjuntos Numéricos: Repaso Números Enteros Z, Números Raciones Q, Irracionales Q^* y números Reales R



COMPETENCIAS

- ✓ Resuelve operaciones básicas en el conjunto Z, aplicadas a situaciones del contexto.
- ✓ Resuelve polinomios a aritméticos en el conjunto, mostrando procesos de solución.
- ✓ Reconoce elementos en el conjunto de números Racionales **Q**, Irracionales Q^* y reales a partir de funciones y sus características.
- ✓ Representa números racionales y números irracionales en la recta numérica.
- ✓ Resuelve y repasa operaciones en los conjuntos numéricos que permitan se aplicados en la solución de situaciones problema.
- ✓ Describe las características de conjunto de números Reales, representa elementos en la recta.

CONTENIDOS:

- ✓ Números enteros y su representación.
- ✓ Los operadores $(+a)\ y\ (-a)$
- ✓ Los operadores $(+a)\ y\ (-a)$
- ✓ Operaciones en Z. Polinomios aritméticos.
- ✓ El conjunto de números Racionales. Operaciones.
- ✓ El conjunto de números Irracionales. Representación en la recta.
- ✓ El Conjunto de números Reales.

ORIENTACIONES GENERALES

Se iniciará el repaso con el concepto de número entero, se realizará inicialmente una conceptualización desde la ubicación de enteros en la recta numérica, para posteriormente enunciar la composición de $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$.

Los conceptos de operaciones básicas se mostrarán a partir de representaciones significativas en la recta numérica y su posterior formalización con la escritura en números.

Cada uno de los temas contará con una serie de ejemplos y ejercicios que permitan contar con elementos básicos para realizar las actividades propuestas.

CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS.

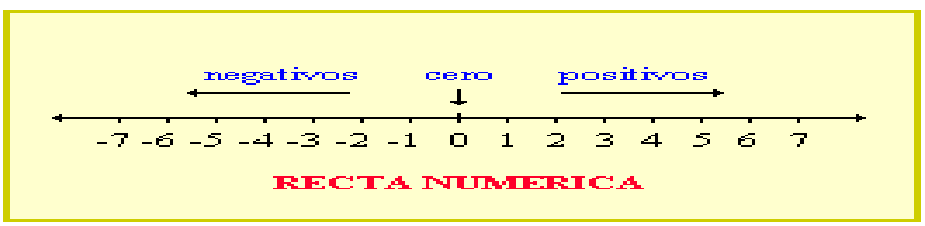
TEMA 1: NÚMEROS ENTEROS Y SU REPRESENTACIÓN.

Concepto:

Los **números enteros** abarcan a los números naturales (los que se utilizan para contar los elementos de un conjunto), incluyendo al **cero** y a los **números negativos** (que son el resultado de restar a un número natural otro mayor). Por lo tanto, los números enteros son aquellos que no tienen parte decimal (es decir que 3,28, por ejemplo, no es un número entero).

Los números enteros negativos tienen diversas aplicaciones prácticas. Con ellos se puede señalar una temperatura bajo cero o una profundidad bajo el nivel del mar (*"El barco hundido fue hallado a -135 metros"*). (Tomado de http://definicion.de/numeros-enteros/)

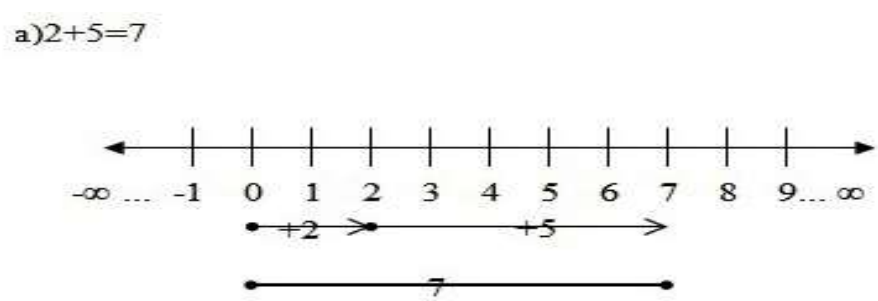
Representación en la recta numérica.



Los operadores $+\boldsymbol{a}$ y $-\boldsymbol{a}$

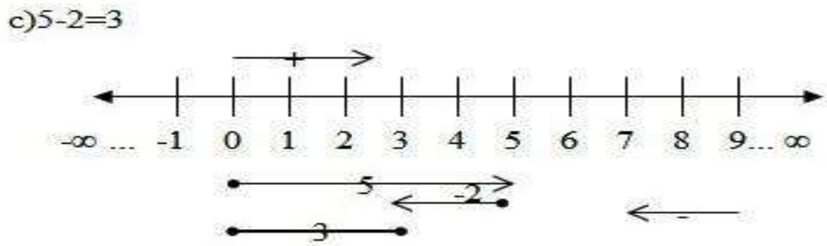
El símbolo $+\boldsymbol{a}$ aplicado a un números natural n prouduce como resultado la suma de n y el número a. Además al aplicar $+\boldsymbol{a}$ al natural n, se produce una traslación de $a\, unidades\ a\ la\ deracha$ sobre la recta numérica (adición): tenemos $(n) + a = n + a$

Veamos: (2) + 5 =2+7. Se traslada el 2, cinco unidades a la derecha.



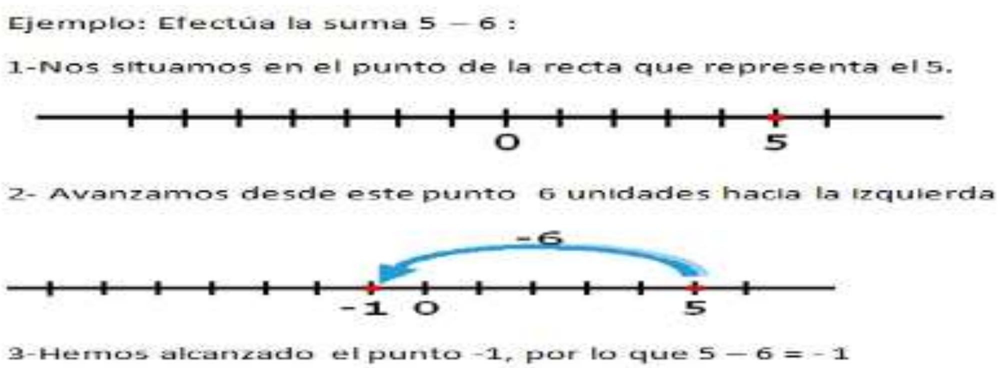
El operador – $\boldsymbol{a}$

Como se efectúa una resta en la recta.

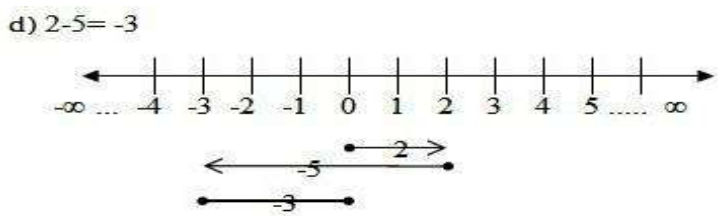


En este caso el operador es $-a$ que aplicado al número n, lo traslada a unidades a la izquierda (resta). En símbolos $(n) - a = n - a$

Qué pasaría si el sustraendo es mayor que el minuendo; vamos una representación:



Ejemplos: representar la aplicación del -5 al número 2



Ejemplo: como se interpreta:

$-2 - 4 =$

$-3 + 5 =$

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE

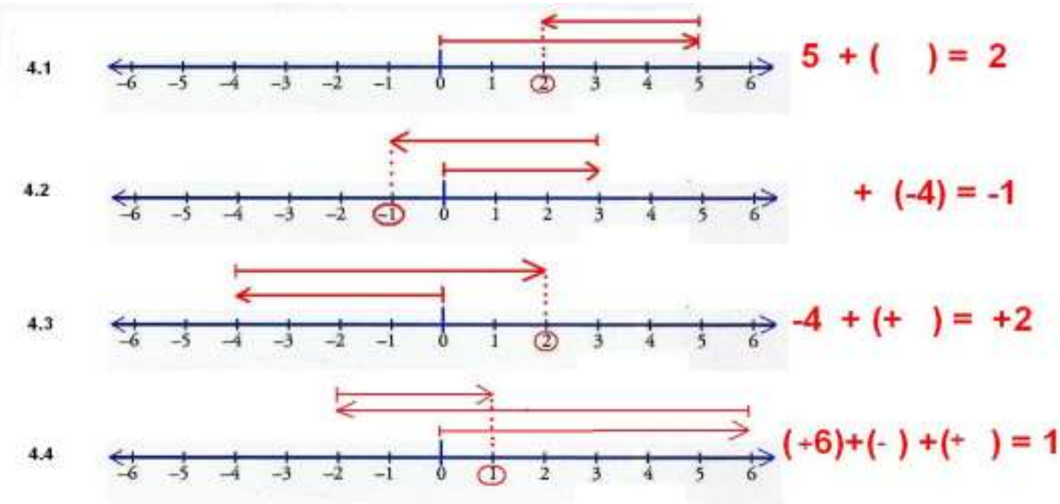
ACTIVIDAD 1.

1. En tus palabras escribe cómo se define un número entero.
2. Aplicar los operadores $+a$ indicados y representar gráficamente.
   A) Operador +5 aplicado al número 4

B) Operador + aplicado al número 3
C) Operador +10 aplicado al número 2

3. Aplicar los operadores $-a$ y representar gráficamente.
   D) Operador -3 aplicado al número 6
   E) Operador -4 aplicado al número 10
   F) Operador -10 aplicado al número 4
   G) Operador -5 aplicado al número 2
   H) Operador -3 aplicado al número -6
   I) Operador -4 aplicado al número -7
   J) Operador +3 aplicado al número -10

4. En cada ejercicio, escribir la operación que presenta la recta numérica:



TEMAS, CONTENIDOS O TEORÍAS.

TEMA 2: ADICIÓN Y SUSTRACIÓN EN Z

Adición de números enteros:

Después de las actividades de representación en la recta se puede observar que:

- ✓ La suma de dos o más enteros positivos, es nuevamente un entero positivo, el cual se obtiene sumando los naturales con los cuales se identifican: $(+a)+(+b) = +(a+b)$
  Ejemplo: $(+7)+(+1) = +(7+1) = +8$
  Ilustrar con un gráfico:

- ✓ Dos más enteros negativos se adicionan como si fueran números naturales y su suma será otro entero negativo:

$(-a)+(-b) = -(a+b)$
Ejemplo: $(-10)+(-5) = -(10+5) = -15$
Ilustrar con un gráfico.

Inverso aditivo

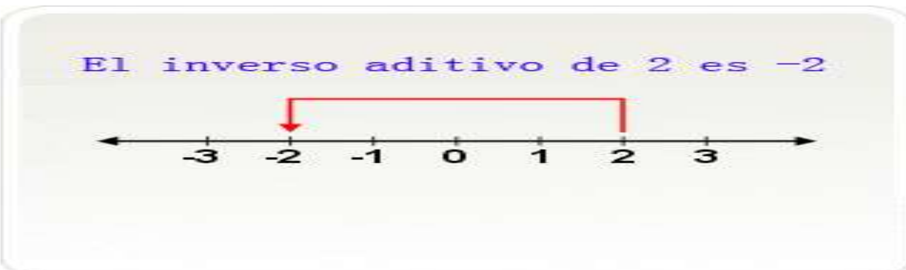
Para todo $a \in Z$ existe otro entero $(-a)$ llamado opuesto o inverso aditivo de a tal que: $a+(-a) = (-a)+a = 0$

Es decir el opuesto de (+ a) $es - a$

Veamos:

El inverso del entero positivo $+4\ es - 4\ porque$: $(+4)+(-4) = 0$

El inverso aditivo del entero negativo $-6\ es + 6\ porque$: $(-6)+(+6) = 0$



Los operadores $+(\ )$ $\boldsymbol{y}$ $-(\ )$

Si $a \in Z$, entonces el operador $+(\ )$ al actuar sobre el número a lo deja invariante (no lo cambia); es decir: $+(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}.$ Este operador se llama operador idéntico.

Ejemplo: $+(+\mathbf{2}) = +\mathbf{2}$

Elaborar el gráfico

Si $a \in Z$, entonces el operador $-(\ )$ al actuar sobre el número a lo transforma en su opuesto o inverso aditivo ; es decir: $-(+\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a}.$ Este operador se llama operador idéntico.

Ejemplo:

- ✓ Al aplicar el operador $-(\ )$ al enero +3 se obtiene: $-(+3\ ) = -\mathbf{3}$
- ✓ Al aplicar el operador $-(\ )$ al enero -5 se obtiene: $-(-3\ ) = +\mathbf{5}$

Sustracción en los enteros

A la suma de un entero con el inverso aditivo otro se llama diferencia.

Si a y b son dos enteros, entonces la diferencia entre a y b la expresamos como $a-\ b$ y significa $a+(-\ b)$.

Ejemplos:

- ✓ $(-4)-(-5)=(-4)+(+5)=+1=1$
- ✓ $(-3)-(-6)=(-3)+(+6)=+3=3$
- ✓ $(-9)-(-1)=(-9)+(+1)=\ -8$
- ✓ $(-8)-(-4)=(-8)+(+4)=\ -4$
- ✓ $(-4)-(+7)=(-4)+(-7)=\ -11$
- ✓ $(-2)-(+1)=(-2)+(-1)=\ -3$

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE

ACTIVIDAD 2:

1. Realiza una consulta sobre las propiedades de la adición y sustracción en Z.
2. Realiza las siguientes adiciones: (sin calculadora)
   A) $(-2)+(-5)=$
   B) $(-7)+(-10)=$
   C) $(-9)+(-30)=$
   D) $(-x)+(-y)=$
   E) $(+13)+(+5)=$
   F) $(+40)+(+11)=$
   G) $(+90)+(+123)=$
3. Para cada número entero, calcular su inverso aditivo.
   A) +3 *como ejemplo: el inverso de +3 es -3 por que:* $(+3)+(-3)=0$
   B) +5
   C) -6
   D) +9
   E) -13
   F) -21
   G) –x
   H) –(3+4)
   I) +(10-6)
4. Aplicar los operadores $+(\ )\ y-(\ )$ a cada uno de los esteros.
   A) +32 entonces $+(+32)=+32$ y $-(+32)=-32$ Ejemplo.
   B) -45
   C) +78
   D) -5
   E) +97

F) -103

5. Resolver cada adición
   A) $4 + (-1) = 4 - 1 = 3$ Recuerda la acción del operador $+(-1) = -1$
   B) $6 + (-5) =$
   C) $3 + (-12) =$
   D) $23 + (-10) =$
   E) $-1 + (-2) =$
   F) $-20 + (-2) =$
6. Resolver cada sustracción.
   A) $(-10) - (-2) = (-10) + (+2) = -8$ o también $-10 + 2 = -8$ ejemplo.
   B) $(-11) - (-20) =$
   C) $(-50) - (-30) =$
   D) $(-1) - (+2) =$
   E) $(-35) - (+5) =$
   F) $(-71) - (-10)=$
   G) $(+5) - (+17)=$
   H) $(+220) - (+541)=$

7. Un hombre camina 50 metros hacia la derecha de un punto A y desde el punto al que llegó camina 85 metros en sentido contrario. ¿A qué distancia se encuentra del punto A? Realiza un dibujo que ilustre la situación y representa con números enteros.
8. Cierto día de verano al medio dio el termómetro carca una temperatura de 35°C y en el transcurso de la tarde desciende 10° C. Qué temperatura marca el termómetro.
9. En cierta ciudad en invierno, un termómetro marca 17°C, en la noche la temperatura desciende 20°C. ¿Qué temperatura está marcando?
10. A partir de 0°C, la temperatura bajó 5°C y más tarde volvió a bajar 8°C. ¿Cuál es la temperatura final?

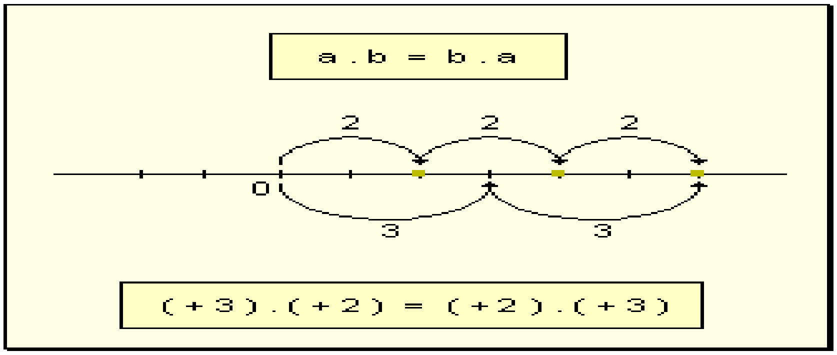
TEMAS, CONTENIDOS O TEORÍAS.

TEMA 3: MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN ENTEROS.

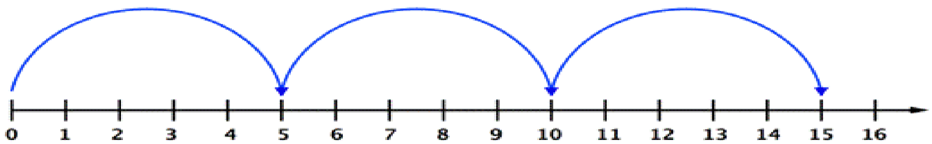
Multiplicación.

¿Cómo se interpretaría 3x2 en la recta numérica?

En la recta se ubica el +2 y luego se reproduce tres veces el valor 2. Se interpreta como tres veces el dos igual 6. Ver el gráfico.



¿Qué multiplicación representa la gráfica? Escribirla.________________________



Pero existen en Z las operaciones de tipo (-3) x (2). ¿Cómo se interpretarían la recta?

Realizar gráfico en clase.

Los operadores $+(\boldsymbol{ax})$ $\boldsymbol{y}$ – $(\boldsymbol{ax})$

Si $a\ es\ un\ natural,$ entonces el efecto de aplicar el operador de la forma $+(\boldsymbol{ax})$ a u número entero b es lo mismo que aplicar el operador $\boldsymbol{ax}$ al entero b.

El resultado de aplicar el operador $+(\boldsymbol{ax})$ a un entero positivo es un entero positivo y al aplicarlo a un entero negativo, el resultado es negativo.

Representar $+(\boldsymbol{3x})$**(4)=**

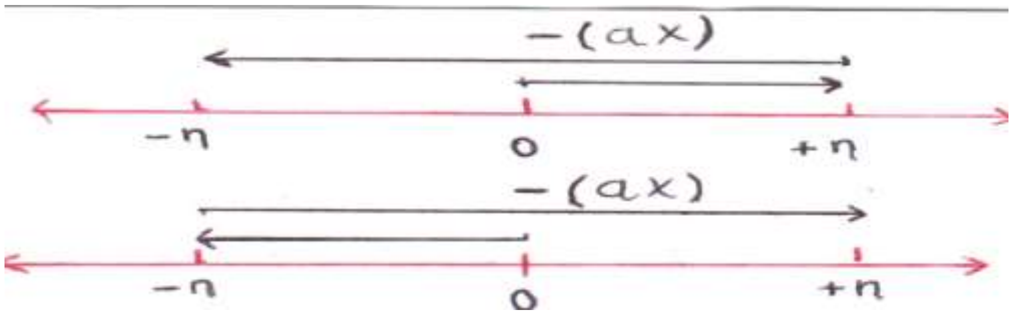
Representemos el efecto de aplicar el operador – $(\boldsymbol{ax})$ a un entero.

Apliquemos $-(2x)\ (3) =$

Conclusión: Si $a\ es\ un\ natural,$ entonces el efecto de aplicar el operador de la forma $-(\boldsymbol{ax})$ a u número entero b es lo mismo que aplicar sucesivamente el operador $\boldsymbol{ax}$ al y luego el operador – ( ).

El resultado de aplicar el operador $-(\boldsymbol{ax})$ a un entero positivo es un entero negativo y al aplicarlo sobre un entero negativo es un entero positivo.

El resultado de aplicar el operador $-(\boldsymbol{ax})$ a un entero b en lacta numérica, se encuentra al lado opuesto de b



Ejemplos:

Representar la acción del operador $-(\mathbf{3x})$ al número 5 = $-(\mathbf{3x})(\mathbf{5}) = -\mathbf{15}$

Representar la acción del operador $-(\mathbf{4x})$ al número 2 = $-(\mathbf{4x})(\mathbf{2}) = -\mathbf{8}$

Representar la acción del operador $-(\mathbf{2x})$ al número -3 = $-(\mathbf{3x})(-\mathbf{3}) = +\mathbf{9}$

Representar la acción del operador $-(\mathbf{4x})$ al número -5 = $-(\mathbf{4x})(-\mathbf{5}) = \mathbf{20}$

De lo anterior podemos concluir que:

La acción del operador $+(\boldsymbol{ax})$ $\boldsymbol{o} - (\boldsymbol{ax})$ sobre un entero b, se llama multiplicación en Z, cuando a es cualquier elemento de N. El resultado obtenido se llama producto, denotado por: $(+a)x\ b\ \ o\ (-a)x\ b$, respectivamente.

Ejemplo: determinar los siguientes productos:

- ✓ $(+5)x(+3) = +(5x)(+2) = +(+10) = +10$
- ✓ $(+4)x(-5) = +(4x)(-5) = +(-20) = -20$
- ✓ $(-2)x(+3) = -(2x)(+3) = -(+6) = -6$
- ✓ $(-6)x(-4) = -(6x)(-4) = -(-24) = +24$

Como conclusiones:

Si a y b, y c son enteros entonces:

- ✓ El producto de dos enteros positivos es otro entero positivo $(+a)x(+b) = +c$
- ✓ El producto de un entero positivo y un entero negativo es un entero negativo: $(+a)x(-b) = -c$

- ✓ El producto de un entero negativo y un entero positivo es un entero negativo: $(-a)x(+b) = -c$
- ✓ El producto de dos enteros positivos es otro entero positivo: $(-a)x(-b) = +c$

Lo anterior se conoce con la ley de signos en el producto:

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE.

ACTIVIDAD 3.

1. Representar en la recta cada producto.
   A) $3x\ 7$
   B) $-4x2$
   C) $(-5)x(-2)$
   D) $(8)x(-2)$
2. Aplicar el operador – $(3x)$ a cada número.
   A) +4
   B) -6
   C) -1
   D) +1
3. Efectuar las siguientes multiplicaciones:
   A) $(+20)x\ (+15) =$
   B) $(-7)x(+25) =$
   C) $(-1)x[(-4)\ + (+7)]$
   D) $[(-7) + (-11)]\ x\ [(+8) + (-10)]$
   E) $[(+6)x(-5)]\ x\ [(-3) + (-6)]$

CONTENIDOS TEMAS O TEORÍAS

TEMA 4. DIVISIÓN EXACTA

En el estudio de los naturales se ha hablado de las propiedades de la división exacta:

$si\ a \div b = c\ entonces\ cxb = a$

Así, si el producto de dos enteros es -30 uno de los factores es +5 entonces el otro será $-6\ porque\ (+5)x(-6) = -30$.

Que sería equivalente a dividir $-30 \div 5 = -6$

Conclusiones:

- ✓ El cociente de dos enteros, ambos positivos o negativos, es otro entero positivo.
- ✓ El cociente entre dos enteros, uno de los cuales es positivo y otro negativo, otro entero negativo.

Se pueden tener en cuenta que:

(+)	÷	(+)	=	+
(+)	÷	(-)	=	-
(-)	÷	(+)	=	-
(-)	÷	(-)	=	+

Ejemplos:

- ✓ $(-4) \div (+2) = -2\ porque\ (-2)x(+2) = -4$
- ✓ $(-15) \div (+3) = +5\ porque\ (+5)x(+3) = -15$
- ✓ $(-25) \div (-5) = (+5)\ porque\ (+5)x(-5) = -25$
- ✓ $(+40) \div (-10) = -4\ porque\ (-4)x(-10) = +40$

FORMACIÓN PSICOMOTRIZ.

ACTVIDAD 4.

1. Calcular los cocientes
   A) $(-35) \div (-7) =$
   B) $(+64) \div (-8) =$
   C) $(+150) \div (-30)$=
   D) $(-144) \div (+12)$=
   E) $[(-8) + (-6)] \div (+7)$
   F) $[(+3) + (-15)] \div [(+8) + (-2)]$
   G) $[(-3 - 5)x\ 2] \div [(-4)x(-1 - 3)]$
2. Efectuar los siguientes polinomios aritméticos
   A) $[30 \div (-6)] + [-12 \div (-2)] + [(-4)x(+2)]$
   B) $(4x5) + [60 \div (-3)] + [10 \div (-2)] - 5$
   C) $(-1)x(3) + [100 \div (-10)] - (-1)$
   D) $[(-12 \div (-2)] - [-6 + 2] + 10$
   E) $(+10)x[(+15) + (-3) + (-12)]$

CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS.

TEMA 5. POTENCIAS Y RAICES EN Z.

Para resolver potencias en Z, se aplica el mismo concepto:

$a^n = axaxa \ldots a\ n\ veces.$

Usando esta definición con enteros tenemos:

$(+4)^2 = (+4)x(+4) = +16$

$(-4)^2 = (-4)x(-4) = +16$ ¿Por qué?

Por lo tanto, el cuadrado de cualquier entero es otro entero positivo.

¿Qué pasa si la potencia es de índice impar?

Veamos:

$(-2)^3 = (-2)x(-2)x(-2) = -8$ Recuerda que se aplica la ley de signos en el producto.

Entonces en una potencia de base negativa e índice impar, se obtiene un entero negativo.

Ejemplos:

- ✓ $(-1)^4 = (-1)x(-1)x(-1)x(-1) =$
  $1 \quad x \quad 1 \quad = 1$ aplicando ley de los signos.

- ✓ $(-3)^3 = (-3)x(-3)x(-3) =$
  $+9 \quad x(-3) = -27$

- ✓ $(4)^2 + (-2)^3 = 16 + (-8) = 16 - 8 = 8$

Raíces en Z.

Al igual que el proceso y la definición que aplicamos en N para potencias, se aplica para el cálculo de raíces en Z. Se debe tener en cuenta el concepto de producto de signos en la solución, además recodar que:

Si $(a)^n = P\ entonces\ \sqrt[n]{P} = a$

Determinar en Z las siguientes raíces, si existen

- ✓ $\sqrt{+4} = \pm 2.\ Por\ que\ (+2)^2 = +4\ \ y\ (-2)^2 = +4$ En Z se dice que son raíces dobles.

- ✓ $\sqrt[3]{-125} = (-5) \;\; por\ que \;\; (-5)^3 = -125$
- ✓ $\sqrt[4]{-16} = No\ existe\ en\ Z, por\ que\ no\ existe\ un\ x^4 = -16.$ Además, vimos que toda potencia en Z, de índice par resulta ser siempre positiva. En Z no existen las raíces negativas de índice par.
- ✓ $\sqrt[5]{-32} = -2 \;\; por\ que \;\; (-2)^5 = -32$
- ✓ $\sqrt[4]{81} = \pm 3 \;\; por\ que\ (+3)^4 = 81 \;\; y\ (-3)^4 = 81$

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE

ACTIVIDAD 5.

1. Resolver cada potencia en Z. Muestra los procesos.
   A) $(-1)^5 =$
   B) $(-2)^4 =$
   C) $(-4)^3 =$
   D) $(+4)^3 =$
   E) $(-2)^5 =$
   F) $(2)^5 =$

2. Calcular cada raíz en Z, si existen: (JUSTIFICA LA RESPUESTA)
   A) $\sqrt{16} =$
   B) $\sqrt{-16} =$
   C) $\sqrt[3]{-27} =$
   D) $\sqrt[4]{-81} =$
3. En cada uno de los siguientes ejercicios, efectuar en primer lugar las adiciones y sustracciones y luego las potencias y raíces. Muestra los procesos de solución.
   A) $[(-2) + (-3) + (+4)]^2$
   B) $\{(-3) + [(-2)x(-3)]\}^3$
   C) $\sqrt[3]{(-2)^6}$
   D) $\sqrt{-2 - 10 + 4 + 24}$
   E) $\sqrt[3]{-8} . \sqrt[4]{16} . \sqrt[5]{-1}$ (considera las raíces positivas para la solución, en caso de existir)

CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS

TEMA 6: NÚNEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$

En las matemáticas se conoce el concepto de números racionales para hacer referencia a aquellos indicadores que permiten conocer el cociente entre dos números enteros. La noción de racional proviene de ración (parte de un todo). Los números racionales están formados por los números **enteros** (que pueden expresarse como cociente: $5 = \frac{5}{1}$, 38= $\frac{38}{1}$ y los números **fraccionarios** (los números racionales no enteros: $\frac{2}{5}, \frac{8}{12}, \frac{69}{253}$, etc.

Una definición más formal $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, con\ b \neq 0\right\}$

¿Qué otras conclusiones de este conjunto se pueden sacar de esta definición?

____
____
____
____

Cada uno de los números enteros posee otro carácter que le sigue; de tal modo que al -1 le sigue el 0 y a éste el 1, sucesivamente, y a su vez entre cada uno de éstos existen infinitos números no racionales.

Los números racionales permiten expresar medidas. Cuando se compara una cantidad con su unidad, se obtiene, por lo general, un resultado fraccionario. Por ejemplo: Si divido una pizza en dos partes, tengo dos mitades. Cada porción será $\frac{1}{2}$de la pizza (una parte de dos). En caso de tomar ambas porciones, volveré a tener la pizza entera ($\frac{2}{2} = 1$).

Los números racionales pueden ser sumados, restados, multiplicados o divididos (excepto por cero). El resultado de estas operaciones será siempre otro número racional. Como los números enteros pueden ser positivos o negativos, se aplica la Ley de Signos. La forma de concretar las operaciones variará de acuerdo a la existencia o ausencia de igual denominador en las fracciones.

Ejemplo 4: de los siguientes números, determinar cuáles son racionales, argumentar por qué.

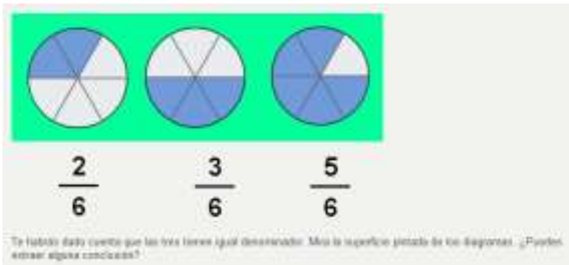
A) $\frac{1}{3}$ es racional, puses $1\ y\ 2 \in \mathbb{Z}, con\ b \neq 0, b = 3$
B) $\frac{0}{7}$ es racional, puses $0\ y\ 7 \in \mathbb{Z}, con\ b \neq 0, b = 7$
C) $\frac{-8}{0}$ no es racional, puses aunque $-8\ y\ 0 \in \mathbb{Z},\ b = 0, no\ cumple\ la\ última\ condición.$
D) $\frac{5}{5}$ $es\ racional\ \ldots por\ que$____
E) $\frac{\sqrt{4}}{5}$____
F) $\frac{\sqrt{2}}{9}$____
G) $\frac{2}{2}$
H) $\frac{4}{2}$

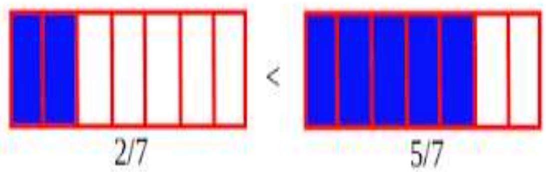
Recordemos ahora las operaciones que intervienen en este conjunto y en qué contextos se utilizan. Estos procesos son del conocimiento de la mayoría de los estudiantes, por tanto solo realizaremos un repaso de ellos involucrando algunos contextos significativos donde intervienen las operaciones con fracciones.

CLASES DE FRACCIONES.

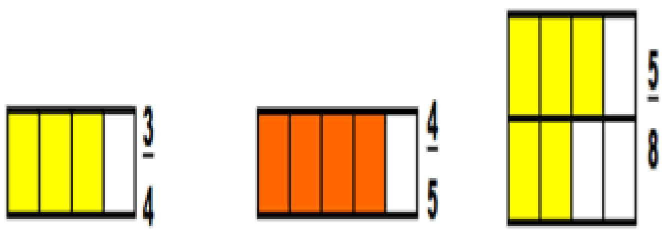
Después de aclarar algunas ideas y de recordar otras, podemos pasar a clasificar lo tipos de fracciones conocidas. Entre ellas tenemos:

1. **Fracciones homogéneas:** son aquellas fracciones que poseen igual denominador, quiere decir que para poderla identificar se deben comprar dos o más fracciones. Además, indican que el todo o la unidad (o unidades) que se parten, se han partido en un número de partes iguales. Veamos.

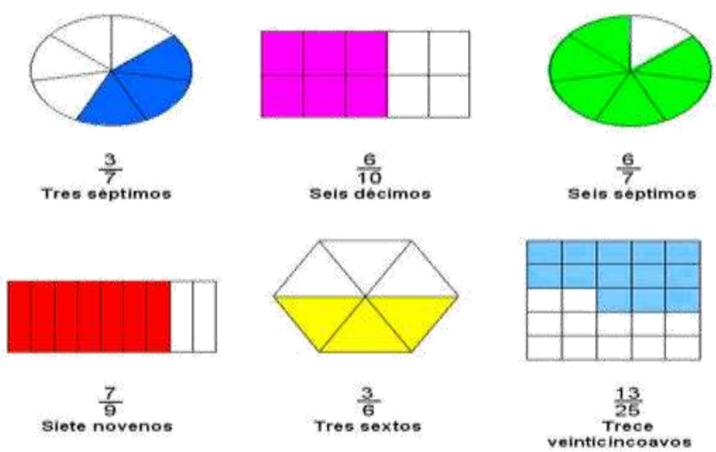




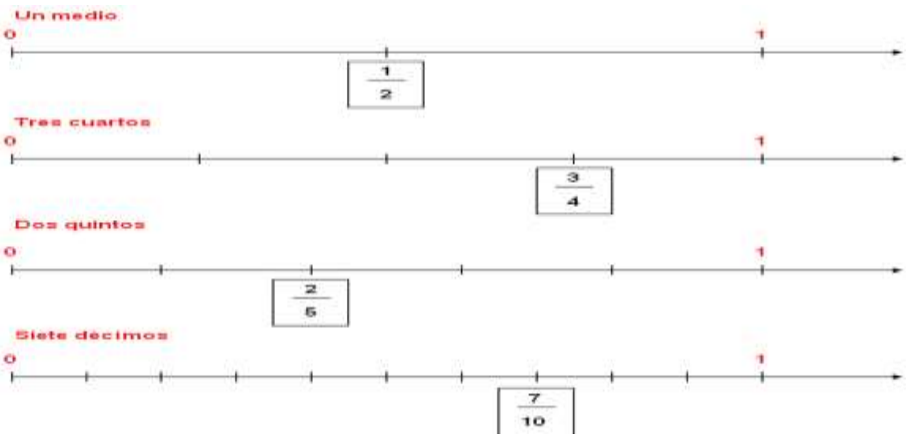
2. **Fracciones heterogéneas:** diferentes a las anteriores, estas poseen denominadores diferentes entre sí, quiere decir que el todo está fraccionado en un número de partes distintas. Veamos unos ejemplos:



3. **Fracciones propias**: son quellas cuya representación requieren el uso de menos de una unidad. Esto quiere decir que, si usamos la recta numérica, las podemos ubicar entre cero y uno. Por tal razón el denominador es mayor que el numerador.

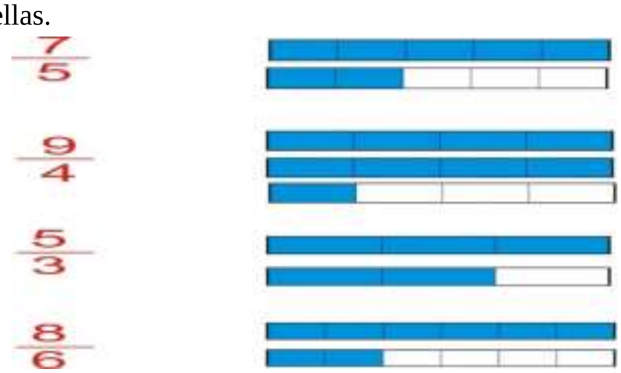


Y en la recta munérica podemos ubicarlas así:

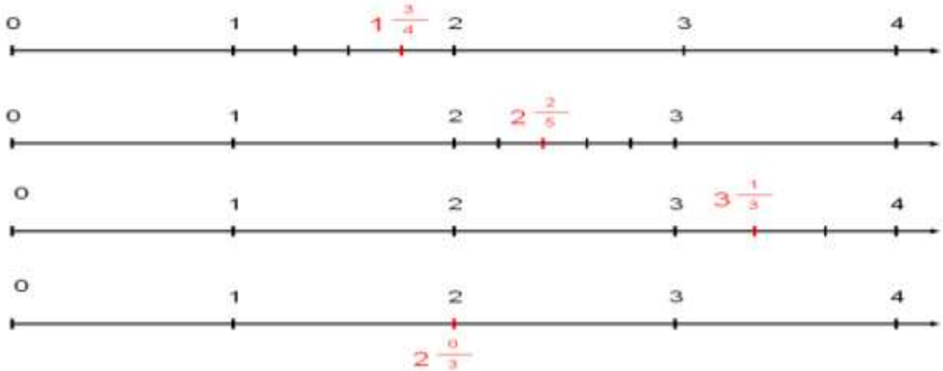


Observemos donde queda ubicada la unidad y las fracciones propias representadadas, todas son menores que uno, o estan entre cero y uno. Formalmente podemos escribir que si $\frac{a}{b}$ es propia, se cumple que: $0 < \frac{a}{b} < 1, con\ b > a$, $b \neq 0$.

4. **Fracciones impropias**: son aquellas cuya representación requieren mas de una unidad, esto implica que son mayores de la unidad. Ademas contrarias a las propias, el denominador es menor que el numerador. Veamos ejemplos de ellas.

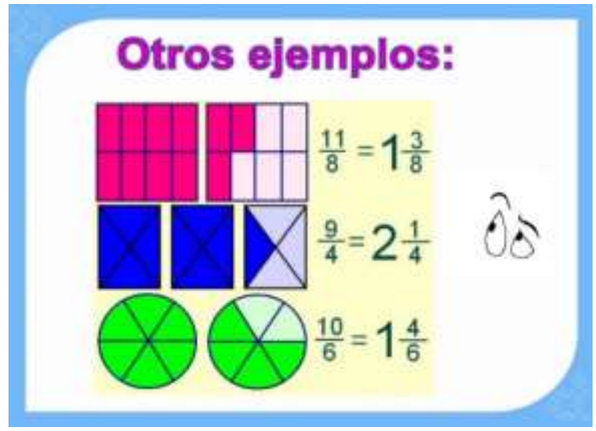


En la recta numérica las podemos ubicar asi:



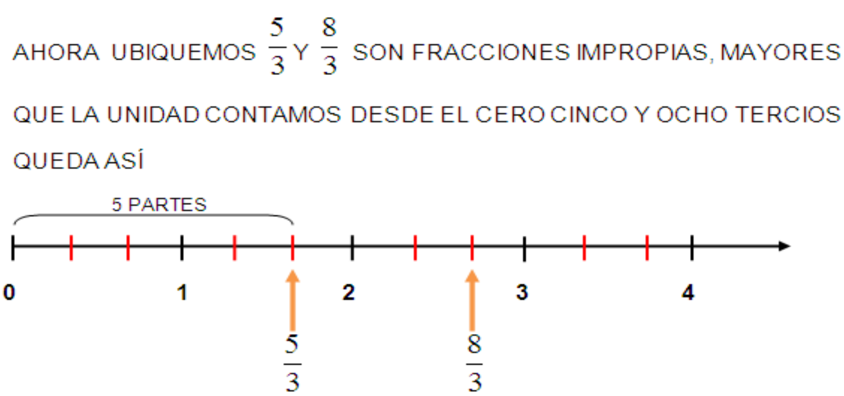
Observemos que todas tinene una unbicación mayor de la unidad. En ellas se cumple que si $\frac{a}{b}$ es impropia, se cumple que: $\frac{a}{b} > 1, con\ b < a,\ b \neq 0$.

5. **Fracción mixta:** Dentro del concepto de fracción impropia aparece implicito el concepto de fracción mixta, ya esta esta tiene que ver con la forma en que podemos expresar una fracción impropia. Es así como la fracción mixta se escribe como una parte numérica entera y una fracción.

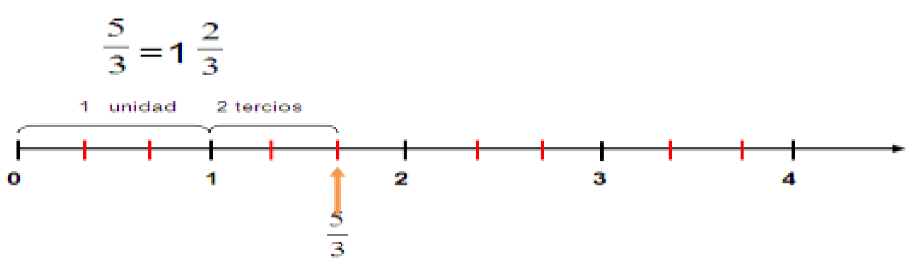


Las partes enteras representan las unidades totales que se toman, o se requiren para representarla, y la fracción son las partes que completan la fracción original.

En la recta las vemos así:



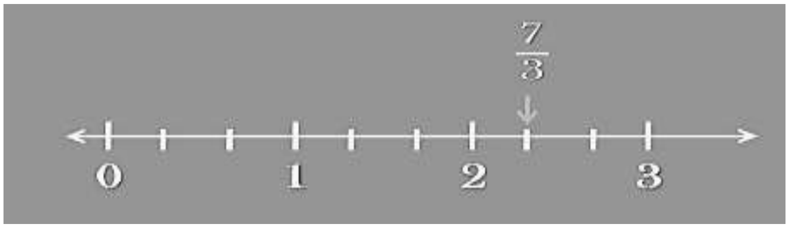
Y expresadas en fracción mixta: $\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$ un entero y dos tercios



Y queda: $\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$ dos eneros y dos tercios.

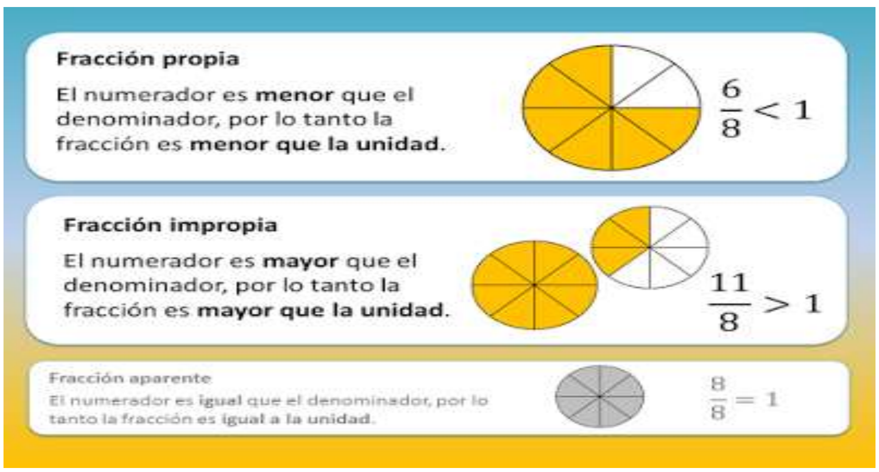
Otro ejemplo: Representar la fracción impropia $\frac{7}{3}$ y escribir en fracción mixta.

Al se rubicada en la recta observamos las particiciones necesarias, partimos cada unidad en tres, requerimos mas de dos unidades.



$$\mathbf{\frac{7}{3} = 2\,\frac{1}{3}}$$

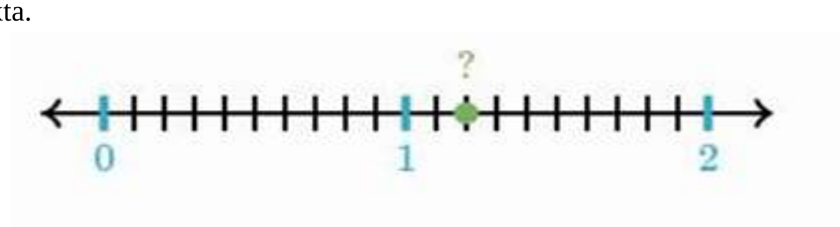
En resumen:



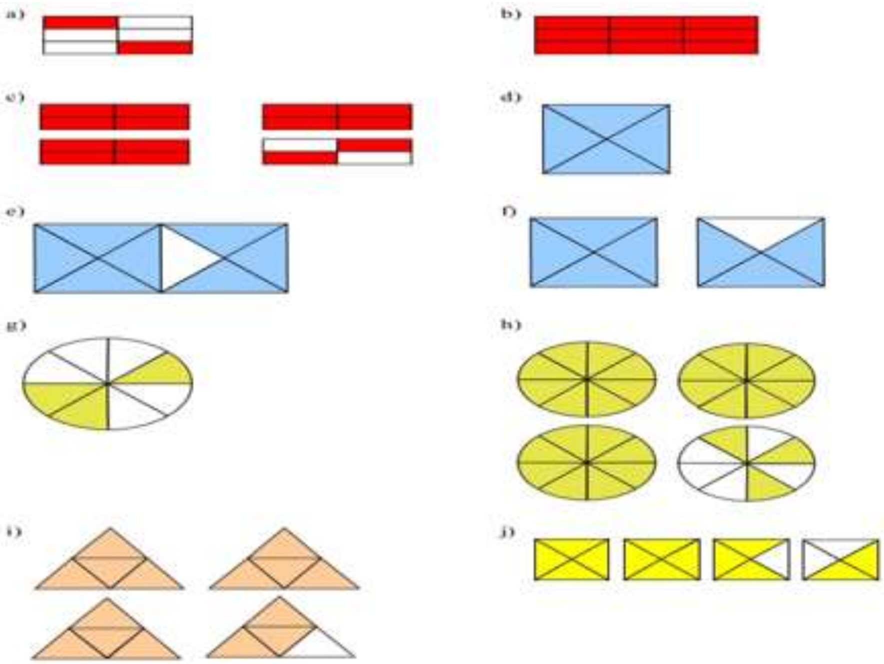
ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE

ACTIVIDAD 6

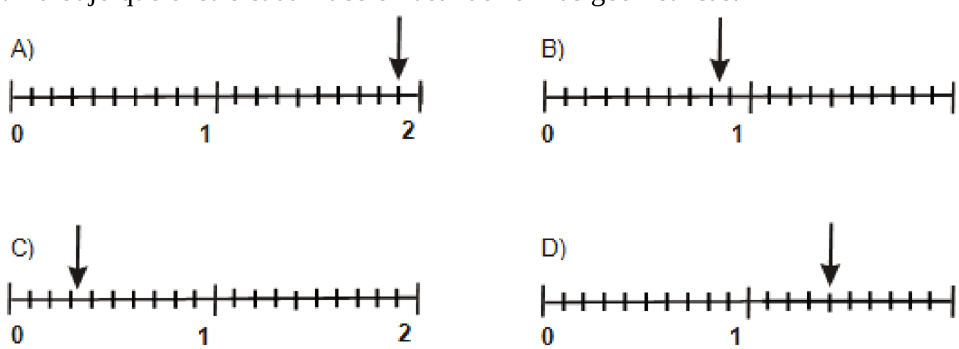
1. En la recta se representa una fracción impropia, determinar dicha fracción y escribir su correspondiente fracción mixta.



2. Escribe la fracción que representa cada figura. Determina si son fracciones propias, iguales a la unidad o impropias. Transforma las que sean impropias en su correspondiente fracción mixta.



3. Las graficas muestran la ubicación de fracciones en la recta, clasificalas según sean propias o impropias. Realiza un dibujo que elistre cada fracción usando formas geométricas.



4. Representa las siguientes fracciones usando la recta numérica. Clasifícalas en propias e impropias.
   A) $\frac{9}{4}$
   B) $\frac{5}{7}$
   C) $\frac{2}{9}$
   D) $\frac{13}{3}$
   E) $\frac{25}{2}$
   F) $\frac{2}{5}$
5. Transforma cada fracción mixta en su forma impropia correspondiente. (Puedes realizar una representación gráfica, de ser necesario)
   A) $4\frac{1}{5}$

B) $3\frac{3}{4}$
C) $2\frac{1}{6}$
D) $7\frac{1}{2}$

6. Transforma cada fracción impropia en su forma mixta correspondiente. (puedes realizar una representación gráfica, de ser necesario)
   A) $\frac{12}{5}$
   B) $\frac{10}{3}$
   C) $\frac{27}{4}$
   D) $\frac{31}{2}$

CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS.

TEMA 7: OPERACIONES CON RACIONALES (Q).

Suma y resta de fracciones homogéneas.

Para estas fracciones se tiene en cuenta que poseen igual denominador entre sí, por tal razón equivale a sumar o restar partes iguales.

Ejemplo: $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

Ejemplo: $\frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$

El esquema propuesto es $\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \\ \quad Y \\ \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \end{cases}$

Suma y reta de fracciones heterogéneas

Recordemos el proceso empleado después de reducir al común denominador.

Ejemplo: sumar

$\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{(2x7)+(3x4)}{(3x7)} = \frac{14+12}{21} = \frac{26}{21}$

Ejemplo: restar:

$\frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{(5x4)+(2x3)}{(2x4)} = \frac{20-6}{8} = \frac{16}{2}$ Simplificando = 8

Ejemplo: restar

$\frac{2}{3} - \frac{8}{5} = \frac{(2x5)-(3x8)}{(3x5)} = \frac{10-24}{15} = -\frac{14}{15}$

Como se puede ver el procedimiento es similar para las dos operaciones, basta tener en cuenta si es suma o resta.

Producto de fracciones.

Tanto para fracciones homogéneas como heterogéneas, se calcula el producto de numeradores y denominadores, así:

$\frac{4}{5}x\frac{3}{2} = \frac{4x3}{5x2} = \frac{12}{10}$ Simplificando=$\frac{6}{5}$ (recuerda simplificar si es posible).

El esquema propuesto es: $\frac{a}{b}x\frac{c}{d} = \frac{axc}{bxd}$

Ejemplo: $\frac{1}{5}x\frac{8}{3} = \frac{8}{15}$

Ejemplo:$\left(\frac{3}{7}\right)x\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{24}{21}$

Ejemplo: $\left(-\frac{2}{3}\right)x\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ (¿Por qué el producto es positivo?)

Fracción de un entero

Esto es un problema de multiplicación de fracciones por un número entero. Para resolverlo, haz lo siguiente:

Primero que nada, ten en cuenta que, para multiplicar una fracción por un número entero, este último siempre tendrá como denominador el número 1. Con lo cual, la operación queda de la siguiente forma:

$$Se\ "a"\ el\ entero\ y\ se\ quiere\ multiplicar\ por\ la\ fracción\ \frac{c}{b}, tenemos\ \frac{a}{1}x\frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

Este tipo de ejercicios son útiles para resolver situaciones donde se requiere calcular fracciones de recorridos, fracciones de terrenos, entre otros.

Ejemplo: calcular un cuarto de 20: $20x\frac{1}{4} = \frac{20}{4} = 5$ (se ha simplificado)

Ejemplo: Calcular los dos tercios de 6: $6x\frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4$

Ejemplo: un terreno de 12 hectáreas se cultiva así: dos tercios con maíz, tres cuartos con caña y el resto del terreno es dedicado a frutales. ¿Cuántas hectáreas se dedican a cada cultivo?

Solución.

Calculamos la porción para cada cultivo: maíz $12x\frac{2}{3} = \frac{24}{3} = 8\ hectáreas$

Caña: $12x\frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3\ hectáreas$

Tenemos 8+3= 11. Luego se dedica 1 hectárea al cultivo de frutales.

Inverso multiplicativo de un racional

Dada la fracción $\frac{a}{b}$ existe la fracción $\frac{b}{a}$ que tiene la propiedad: $\frac{a}{b} x \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$

Podemos decir que la fracción $\frac{b}{a}$ es el inverso multiplicativo (o recíproco) de la fracción $\frac{b}{a}$.

Ejemplo: la fracción $\frac{3}{8}$ tiene como inverso o recíproco la fracción $\frac{8}{3}$, pues $\frac{3}{8} x \frac{8}{3} = 1$

División de fracciones

Para dividir fracciones $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ multiplicamos la fracción $\frac{a}{b}$ $(dividendo)$ por el reciproco de la fracción $\frac{c}{d}$ $(divisor)$ Así: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} x \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Este proceso es equivalente a $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ Una multiplicación de medios y extremos.

Ejemplo: $\frac{2}{7} \div \frac{4}{5} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

Ejemplo: $\frac{7}{3} \div \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{35}{6}$ (¿Por qué el cociente es negativo?).

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE.

ACTIVIDAD 7.

1. Resolver cada operación con fracciones, simplificar si es posible.
   A) $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} =$
   B) $\frac{2}{9} + \frac{8}{9} =$
   C) $\frac{10}{4} - \frac{15}{4} =$
   D) $\left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3}$
   E) $\frac{3}{7} + \frac{1}{2} =$
   F) $\frac{11}{4} + \frac{3}{2} =$
   G) $\frac{3}{7} + \frac{1}{2} =$
   H) $\frac{3}{4} - \frac{1}{11} =$
   I) $\left(\frac{2}{3} + \frac{7}{5}\right) - \frac{1}{2} =$
   J) $\frac{3}{7} x \frac{1}{10} =$
   K) $\frac{5}{6} x \frac{1}{2} =$
   L) $\frac{3}{7} x \frac{5}{2}$
   M) $\frac{3}{10} x \left(-\frac{1}{2}\right) =$

N) $\left(-\frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{2}\right) =$
O) $\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$
P) $\frac{3}{6} \div \frac{1}{10} =$
Q) $\frac{12}{5} \div \frac{1}{2} =$
R) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} =$

2. Resolver aplicando los procedimientos adecuados:
   A) $-\frac{4}{9} \div \frac{7}{3} =$
   B) $\left(\frac{3}{1} \div \frac{4}{3}\right) \div \frac{-2}{27} =$
   C) $\left(\frac{5}{8} \div \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) =$
   D) $\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) x \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3}\right)$
3. Calcular el inverso multiplicativo (recíproco de cada fracción)
   A) $\frac{1}{2}$
   B) $\frac{3}{8}$
   C) $\frac{5}{12}$
   D) $\frac{1}{6}$
   E) $-\frac{7}{5}$
   F) $-\frac{4}{9}$
4. Resolver cada situación problema
   A) Una competencia de 6 k se realiza de la siguiente forma: un tercio en bicicleta, un medio a trote y el resto del recorrido nadando. ¿Cuántos kilómetros se dedican a cada recorrido?
   B) Un terreno de 15 Ha se quiere sembrar con árboles, un quinto se siembre con pinos, dos tercios con cedros y el resto del terreno con sauces. ¿Qué porción del terreno se dedica a los sauces?
   C) Un depósito contiene 150 litros de agua. Se consumen los $\frac{2}{5}$ de su contenido. ¿Cuántos litros de agua quedan?
   D) Para preparar un pastel, se necesita: $\frac{1}{3}$ de un paquete de 750 g de azúcar. $\frac{3}{4}$ de un paquete de harina de kilo. $\frac{3}{5}$ de una barra de mantequilla de 200 g. Halla, en gramos, las cantidades que se necesitan para preparar el pastel.
   E) Una familia ha consumido en un día de verano: dos botellas de litro y medio de agua. 4 botes de $\frac{1}{3}$ de litro de zumo. 5 limonadas de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántos litros de líquido han bebido? Expresa el resultado con un número mixto.

CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS.

TEMA 8: EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS RACIONALES.

Un número racional $\frac{a}{b}$ se llama racional decimal si el denominador b es una potencia de la forma 10^n para algún número natural n.

Los racionales decimales pueden representarse mediante expresiones decimales, utilizando el punto decimal y expresando los recíprocos de las potencias de 10 así:

$\frac{1}{10}$ $se\ simboliza\ por$ 0.1 Un décimo-una décima.

$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 0.01$ Una centésima.

$\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 0.001$ Una milésima.

En general $\frac{1}{10^n} = 0.\underbrace{000 \ldots 0}_{n-1\ ceros}1$

Para la fracción $\frac{1543}{10^2} = \frac{1543}{100} = 15 + \frac{43}{100} = 15 + \frac{40}{100} + \frac{3}{100} = 15 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100} = 15.43$

La expresión decimal de un racional puede obtenerse también mediante la división entre numerador y denominador. (Londoño, Guarín & Bedoya, 1993). Por ejemplo:

$\frac{3}{5} = \frac{3x2}{5x2} = \frac{6}{10} = 0.6$ Se lee seis décimas.

$\frac{3}{4} = \frac{3x25}{4x25} = \frac{75}{100} = 0.75$ Setenta y cinco centésimas.

$\frac{7}{40} = \frac{7}{8x5} = \frac{7x5^2}{2^3x5x5^2} = \frac{7x5^2}{2^3x5^3} = \frac{7x25}{8x125} = \frac{175}{1000} = 0.175$ ¿Cómo se lee?

Ahora, los decimales racionales que tienen una expresión decimal que termina después de un número finito de cifras, se llaman *decimales finitos* o *decimales exactos.*

Por ejemplo: 0.25- 0.175-0.345-5.75

Lo anterior se rige bajo el siguiente fundamento:

Un número racional $\frac{a}{b}$ tienen una representación decimal finita o exacta si y sólo sí el denominador b no contiene factores primos diferentes de 2 y 5.

Números racionales de representación decimal infinita

Realicemos la división indicada entre (el racional) $\frac{a}{b} = \frac{7}{3} = 2.333\ldots$

Podemos evidenciar una cifra que se repite indefinidamente, esta cifra recibe el nombre de período. Un decimal con estas características se llama *decimal periódico*. Para representarlo ubicamos una rayita sobre el período: $2.\overline{3}$

Otro ejemplo: $\frac{5}{7} = 0.714285 \ldots = 2.\overline{714285}$

En ambos casos el denominador b no posee no contiene a 2 ni a 5 como factores primos.

Decimal infinito periódico: decimal que posee un período.

Decimal infinito no periódico: decimal infinito que no posee período.

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE

ACTIVIDAD 8.

1. Determinar cuáles de los siguientes racionales son racionales decimales. Explicar por qué.
   A) $\frac{7}{200}$
   B) $\frac{3}{40}$
   C) $-\frac{8}{625}$
   D) $\frac{22}{7}$

2. Encontrar el período para cada uno de los racionales. Muestra los procesos.
   A) $\frac{17}{12}$
   B) $\frac{17}{15}$
   C) $\frac{170}{30}$
3. Determinar a cuáles de los siguientes racionales corresponden expresiones decimales finitas y encontrarlas.
   A) $\frac{37}{128}$
   B) $\frac{10}{3}$
   C) $\frac{1531}{50}$
   D) $-\frac{216}{45}$
   E) $\frac{5}{3}$

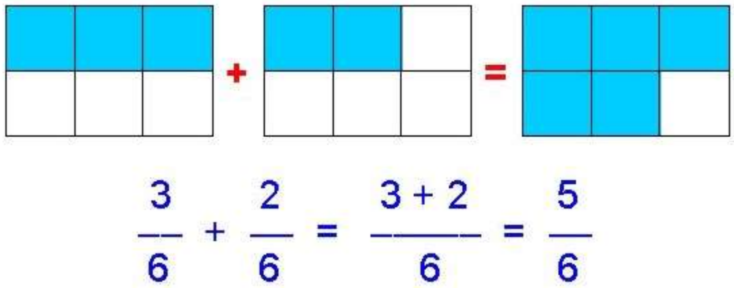
CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS.

TEMA 9: OPERACIONES CON FRACCIONES

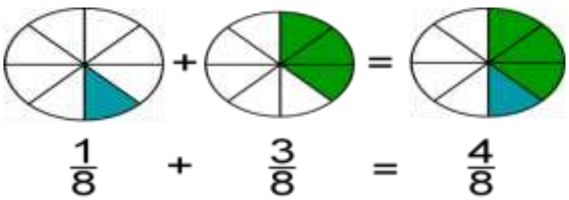
SUMA Y RESTA DE FRACCIONES HOMOGÉNEAS:

Empezaremos por sumar y restar las fracciones homogéneas, las cuales por representar partes iguales, son sencillas de operar. Además ya hemos recordado en temas pasados lo que caracteriza a estas fracciones.

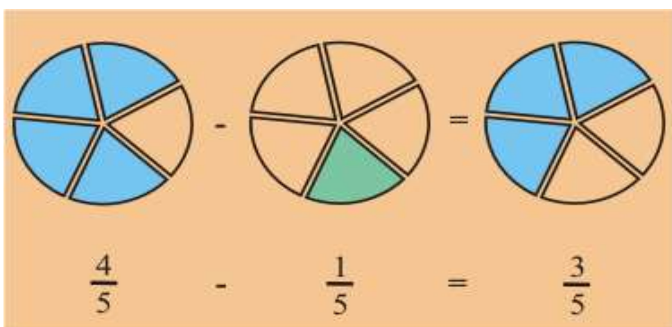
Ejemplo 1.



Ejemplo 2.



Ejemplo 3 Para una resta.



La razón de estos procesos es porque se están sumando o restando partes iguales.

¿Cómo se realizaría estos procesos usando la recta numérica?

Es evidente que sólo es suficiente sumar o restar los numeradores y conservar el mismo denominador.

Ejemplos:

- ✓ $\frac{3}{4}+\frac{10}{4}=\frac{13}{4}$
- ✓ $\frac{7}{2}-\frac{4}{2}=\frac{3}{2}$

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE.

ACTIVIDAD 9.1

1. Resolver cada operación con fracciones homogéneas.

A) $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} =$
B) $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}$
C) $\frac{11}{4} + \frac{1}{4} =$
D) $\frac{5}{7} + \frac{2}{7} =$
E) $\frac{11}{10} - \frac{3}{10}$
F) $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) - \frac{5}{3}$
G) $\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right) - \frac{3}{4}$
H) $\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right)$

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES HETEROGÉNEAS

En este caso se cuenta con fracciones que representan partes diferentes en tamaño, es decir con denominadores distintos. Para realizar la suma o resta, podemos aplicar el concepto de fracciones equivalentes y fracciones homogéneas, transformando las fracciones en equivalentes y homogéneas entre sí.

Por ejemplo, si deseamos sumar las fracciones $\frac{3}{5} + \frac{2}{4}$, debemos amplificar cada una de ellas de tal manera que podamos obtener un denominador común para las dos, y después realizar la operación homogénea. Así:

$\frac{3x4}{5x4} = \frac{12}{20}$ y realizamos un proceso similar con $\frac{2x5}{4x5} = \frac{10}{20}$. Hemos obtenido dos fracciones equivalentes y realizamos la suma homogénea de las fracciones finales que son equivalentes a las primeras.
$\frac{12}{20} + \frac{10}{20} = \frac{22}{20}$. y simplificando queda $\frac{11}{10}$. Después de aplicar el método se requiere simplificar.

¿Qué puedes evidenciar en este método y como se puede simplificar?

Otro ejemplo: $\frac{5}{3} + \frac{7}{4} =$

$\frac{5x4}{3x4} = \frac{20}{12}$ Amplificando de manera conveniente. $\frac{7x3}{4x3} = \frac{21}{12}$

Sumamos las fracciones equivalentes $\frac{20}{12} + \frac{21}{12} = \frac{41}{12}$

Este camino también es válido para restar fracciones heterogéneas, veamos:

$$\frac{11}{3} - \frac{2}{5} =$$

$\frac{11x\ 5}{3x5} = \frac{55}{15}$ Y $\frac{2x3}{5x3} = \frac{6}{15}$ restamos las fracciones $\frac{55}{15} - \frac{6}{15} = \frac{49}{15}$

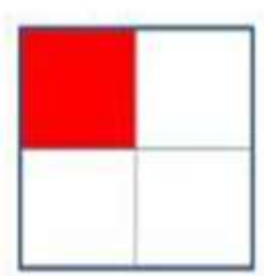
Ahora tratemos de analizar el método y resumirlo un poco:

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE.
ACTIVIDAD 9.2

1. Resolver cada operación con fracciones.
   A) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=$
   B) $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}=$
   C) $\frac{9}{2}+\frac{2}{3}=$
   D) $\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=$
   E) $\frac{10}{3}-\frac{3}{2}=$
   F) $\frac{8}{5}-\frac{1}{3}=$
   G) $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{3}=$
   H) $\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{2}{3}\right)$

PRODUCTO DE FRACCIONES (EN GENERAL)

Antes de iniciar con una formalización de procesos, debemos interpretar la acción de una fracción como operador, por ejemplo: $\frac{1}{4}\ de\ 1$ lo hemos representado así:



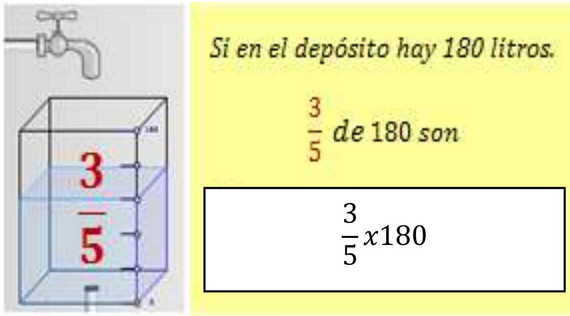
Lo que finalmente se reduce a $\frac{1}{4}$. Es decir que $\frac{1}{4}\ de\ 1 = \frac{1}{4}$.

Recordemos que el 1 representanta el todo, la unidad. Y esta unidad la que partimos en cuartos y tomamos uno de ellos.

Según lo anterior, podemos escribir una operación equivalente $\frac{1}{4}\ de\ 1 = \frac{1}{4}x\frac{1}{1}=\frac{1}{4}$

O de manera más simple $\frac{1}{4}x1=\frac{1x1}{4}=\frac{1}{4}$

Veamos en contexto donde se puede aplicar esta deducción de fracción de un número entero:

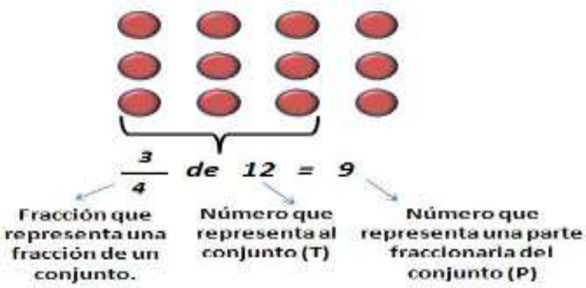


Donde 180 litros es todo (entero) y se debe calcular la fracción representativa $\frac{3}{5}$, lo que indicaría dividir a 180 en quintos y tomar tres de ellos.

$\frac{3}{5}x180 = \frac{3x180}{5} = 108\ litros.$

Se realiza la simplificación o división indicada.

Otro ejemplo:

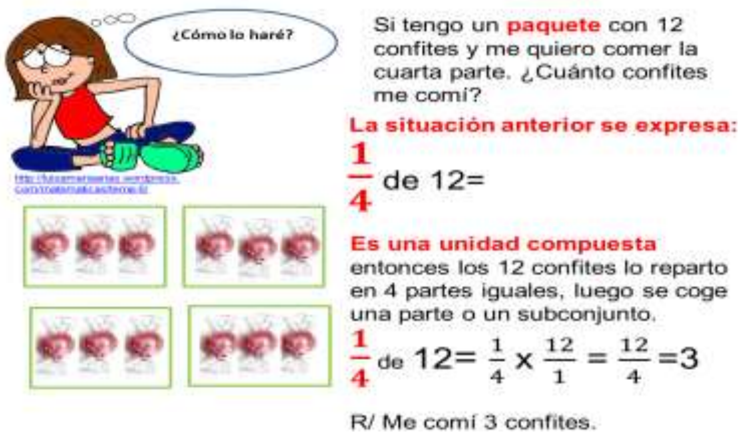


Donde 12 es todo (entero) y se debe calcular la fracción representativa $\frac{3}{4}$, lo que indicaría dividir a 12 en cuartos y tomar tres de ellos.

$$\frac{3}{4}x12 = \frac{3x12}{4} = 9$$

El 9 resulta de simplificar o dividir.

Analicemos además estos ejemplos para aplicar:



Veamos ahora un caso menos evidendete, **¿qué se entiende por $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$?** De manera similar debemos contar con un medio y representar un tercio de ese medio. Veamos su represntación:

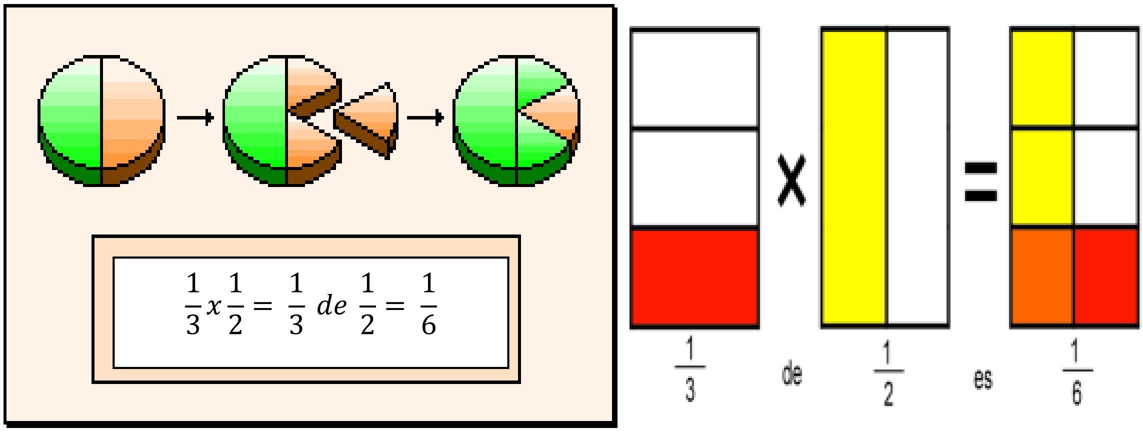


Imagen de http://www.escolar.com/avanzado/matema076.htm

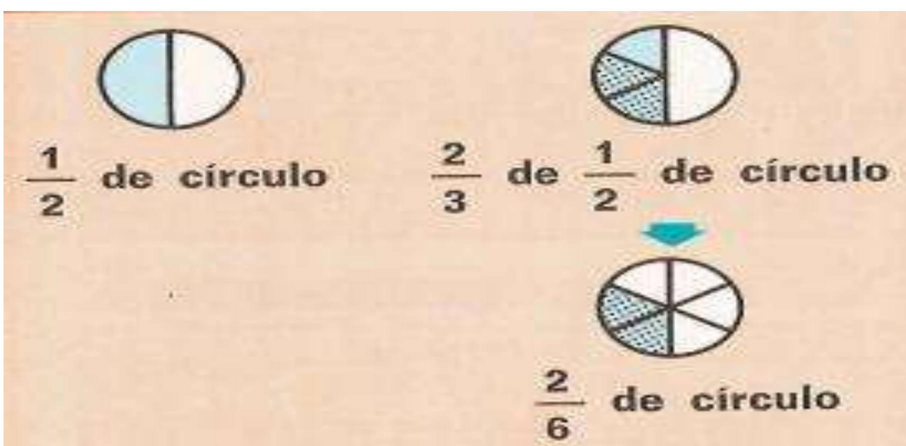
Observamos que el resultado equivale a $\frac{1}{6}$ del todo. En este caso el denominador del resultado aparece amplificado por la acción realizada.

Según esto podemos escribir como operaciones equivalentes:

$$\mathbf{\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{2} = \frac{1}{3} x \frac{1}{2} = \frac{1}{6}}$$

Donde se hace evidente una multiplicación de las fracciones.

Otro ejemplo: $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ **y veamos su representación:**



Y la operación equivalente sería: $\frac{2}{3}\ de\ \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\ x\ \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ con relación al todo.

¿Cuál sería entonces el proceso para multiplicar fracciones?

Ejemplos:

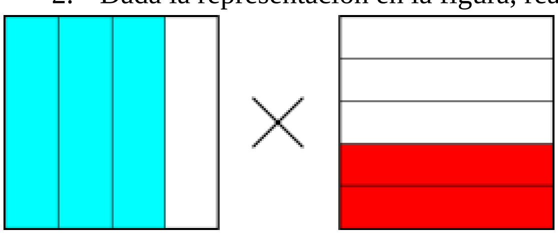
- ✓ $\frac{2}{5}x\frac{3}{4} = \frac{2x3}{5x4} = \frac{6}{20}$ *Simplificando* $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ ¿por qué?
- ✓ $\frac{1}{9}x\frac{2}{5} = \frac{2}{45}$ *algo más rápido.*
- ✓ $\frac{2}{3}x\frac{1}{4}x\frac{5}{2} = \frac{2x1x5}{3x4x2} = \frac{10}{24}\ simplificando\ \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

FORMACIÓN PSICOMOTRIZ

ACTIVIDAD 9.3

1. Representar gráficamente (dibujar) cada operación y solucionarlas.
   A) $\frac{1}{2}\ de\ \frac{1}{2}$
   B) $\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{3}$
   C) $\frac{1}{4}\ de\ \frac{1}{2}$
   D) $\frac{3}{5}\ de\ \frac{1}{3}$
   E) $\frac{3}{4}\ de\ \frac{3}{7}$
   F) $\frac{2}{3}\ de\ \frac{2}{5}$

2. Dada la representación en la figura, realizar el producto, colorear la repuesta. Traducir a fracciones.



1. Realizar cada producto de fracciones.

A) $\frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{2} =$
B) $\frac{1}{4}\ x\ \frac{1}{4} =$
C) $\frac{5}{6}\ x\ \frac{1}{4} =$
D) $\frac{7}{3}\ x\ \frac{3}{4} =$
E) $\frac{1}{4}\ x\ \frac{1}{3}x\frac{1}{2}\ =$
F) $\frac{3}{2}\ x\ \frac{1}{2} =$
G) $\frac{5}{2}\ x\ \frac{1}{3}x\frac{3}{2}\ x\ \frac{1}{2} =$
H) $-\frac{5}{3}\ x\ \frac{3}{4} =$
I) $\left(\frac{5}{6}\right)\ x\left(-\frac{1}{4}\right) =$
J) $\left(-\frac{5}{12}\right)x\left(-\ \frac{17}{2}\right) =$

2. Resolver cada situación problema aplicando la teoría de fracciones vista.

F) Una competencia de 6 k se realiza de la siguiente forma: un tercio en bicicleta, un medio a trote y el resto del recorrido nadando. ¿Cuántos kilómetros se dedican a cada recorrido?

G) Un terreno de 15 Ha se quiere sembrar con árboles, un quinto se siembre con pinos, dos tercios con cedros y el resto del terreno con sauces. ¿Qué porción del terreno se dedica a los sauces?

H) Un depósito contiene 150 litros de agua. Se consumen los $\frac{2}{5}$ de su contenido. ¿Cuántos litros de agua quedan?

I) Para preparar un pastel, se necesita: $\frac{1}{3}$ de un paquete de 750 g de azúcar. $\frac{3}{4}$ de un paquete de harina de kilo. $\frac{3}{5}$ de una barra de mantequilla de 200 g. Halla, en gramos, las cantidades que se necesitan para preparar el pastel.

J) Una familia ha consumido en un día de verano: dos botellas de litro y medio de agua. 4 botes de $\frac{1}{3}$ de litro de zumo. 5 limonadas de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántos litros de líquido han bebido? Expresa el resultado con un número mixto.

DIVISIÓN DE FRACCIONES

Realicemos la siguiente interpretación: hemos partido una pizza en octavos, de los cuales se han consumido $\frac{2}{8}$, es decir que nos quedan $\frac{6}{8}$. Además estos $\frac{6}{8}$ los debemos repartir en dos personas. La gráfica muestra una solución de la situación.

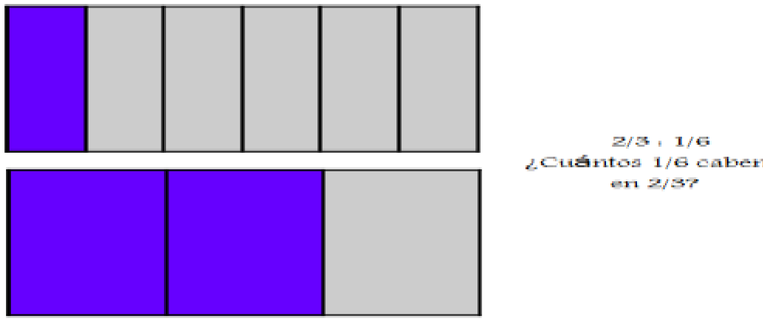
Es decir que $\frac{6}{8} \div 2 = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$. A cada persona le corresponde $\frac{3}{8}$.

Entonces $\frac{6}{8} \div 2 = \frac{3}{8}$

¿Qué conclusión se puede obtener?

Veamos otra forma de interpretar el concepto de división en fracciones. Observemos $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$

Nos podemos hacer la pregunta: Cuantos $\frac{1}{6}$ ***caben en*** $\frac{2}{3}$. Veamos la representación.



Un espacio para la formalización….

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE

ACTIVIDAD 9.4

1. Resolver cada división de fracciones.
   A) $\frac{2}{3} \div 2 =$
   B) $\frac{4}{7} \div 3 =$
   C) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$
   D) $\frac{4}{5} \div \frac{1}{2}$
   E) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$

2. Propone una situación de la vida real donde apliques división de fracciones. Resolver además esta situación mostrando las divisiones (o división) realizadas

CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS

TEMA 10: EXPRESIÓN DECINAL DE LOS RACIONALES

Un número racional $\frac{a}{b}$ se llama racional decimal si el denominador b es una potencia de la forma 10^n para algún número natural *n*.

Los números racionales decimales pueden expresarse mediante expresiones decimales, así:

$\frac{1}{10} = 0{,}1 \quad una\ décima$

$\frac{1}{10^2} = 0{,}01 \quad una\ centésima$

$\frac{1}{10^3} = 0{,}001 \quad una\ milésima$

El número $\frac{1245}{10^2} = \frac{1245}{100} = 12 + \frac{45}{100}$

$$12 + \frac{40}{100} + \frac{5}{100} = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} = 12{,}45$$

La expresión decimal correspondiente a un número racional $\frac{a}{b}$ puede obtenerse mediante la división usual entre el numerador y denominador (Londoño, Guarín y Bedoya, 1997)

$$\frac{3}{4} = \frac{3x25}{4x25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Ejemplos: Determinar la expresión decimal correspondiente a los siguientes racionales decimales.

- ✓ $\frac{7}{40} = \frac{7x5^2}{2^3x5x5^2} = \frac{7x5^2}{2^3x5^3} = \frac{175}{10^3} = 0{,}175$
- ✓ $\frac{3}{16} = \frac{3x5^4}{2^4x5^4} = \frac{3x625}{10^4} = \frac{1875}{10000} = 0{,}1875$
- ✓ $-\frac{17}{10} = -1{,}7$

Como conclusión:

Lo números racionales decimales que tienen una expresión decimal que termina después de un número finito de cifras, se llaman decimales finitos o simplemente decimales exactos.

Un número racional $\frac{a}{b}$ tiene una expresión decimal finita o exacta si y solo si el denominador b no contiene factores primos diferentes de 2 y 5.

Ejemplo: dadas las expresiones decimales finitas, determinar el número racional de la forma $\frac{a}{b}$ correspondiente a cada una de ellas.

- ✓ $15{,}456 = 15 + 0{,}456 = 15 + \frac{456}{1000} = \frac{15000+456}{1000} = \frac{15456}{1000}$
- ✓ $1{,}0349 = 1 + 0{,}0349 = 1 + \frac{349}{10000} = \frac{10000+349}{10000} = \frac{10349}{10000}$
- ✓ $-5{,}23 = 5 + 0{,}23 = 5 + \frac{23}{100} = \frac{500+23}{100} = \frac{523}{100}$

Por otro lado existen otros racionales de la forma $\frac{a}{b}$ que no poseen representación decimal finita, (decimales infinitos) por ejemplo:

$\frac{5}{3}$ Para lo cual realizamos la una simple división:

5	3
20	1, 666
20	
20	
2	

50	7
10	0,714285
30	
20	
60	
40	
5	

Cuando dividimos 5 entre 3, obtenemos repetidamente la cifra 2 en el residuo y 6 en el cociente después del punto decimal. Y cuando efectuamos la división de 5 entre 7, reaparece la cifra 5 después de 6 divisiones parciales, por tanto el bloque de cifras 714285 después del punto decimal, se volverá a repetir.

Por tanto los racionales $\frac{5}{3}$ y $\frac{5}{7}$ son números con expresión decimal infinita.

El bloque de cifras que se repite lo llamamos período y se representa así:

$$\frac{3}{5} = 1,\overline{666} = 1,\overline{6} \quad y \quad \frac{5}{7} = 0,\overline{714285714285} = 0,\overline{714285}$$

$$\frac{3}{5}\ tiene\ período\ 6\ y\ \frac{5}{7}\ tiene\ período\ 714285$$

En ambos casos el denominador b, no posee a 2 ni a 5 como factores primos.

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE.

ACTIVIDAD 10.

1. En una carrera de atletismo se registraron los siguientes tiempos de llegada:

Competidor	**Tiempo (min)**
Juan	**30,451**
Pedro	**31,567**
José	**30,421**
Julia	**33,765**
Jacinto	**34,044**
Vicenta	**30,415**

Ordena del menor al mayor tiempo realizado en la competencia para determinar quién gana la carrera.

2. Escribe la forma correcta de leer los siguientes números, sigue el ejemplo.

Número	Lectura
20,251	20 enteros, 2 décimas, 5 centésimas, una milésima.
1,0366	
0,87651	

356,1298	
5,876592	

3. Determinar la expresión decimal correspondiente a los siguientes racionales decimales. Indicar cuáles son periódicos

A) $\frac{5}{40}$
B) $\frac{7}{55}$
C) $\frac{9}{20}$
D) $\frac{3}{32}$
E) $\frac{7}{9}$
F) $\frac{5}{11}$
G) $\frac{5}{36}$

4. Dadas las expresiones decimales finitas, determinar el número racional de la forma $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ correspondiente a cada una de ellas.

A) 0,234
B) 23,89
C) 15,561
D) 13,0764

CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS.

TEMA 11: CONJUNTO DE NÚMEROS IRRACIONALES $\mathbb{Q}^*$

Algo de historia:

Los números racionales o fracciones aparecieron muy pronto en la historia de las matemáticas. Como la gran mayoría de los conceptos matemáticos, su descubrimiento fue debido a la necesidad de resolver un problema. Los antiguos necesitaban medir longitudes, áreas, tiempo, pesos y todo otro tipo de medidas. Al enfrentarse a esto en la vida cotidiana, pronto descubrieron que no era suficiente poder contar con los números naturales para hacerlo de manera exacta, ya que estas medidas eran susceptibles de divisiones más pequeñas que la unidad, o divisiones mayores que la misma pero que no eran números naturales, por lo que fue necesario ampliar el concepto de número natural. Así surgieron los números racionales.

Las fracciones aparecen ya en los primeros textos matemáticos de los que hay constancia, quizás uno de los más antiguos y más importantes sea el Papiro Rhind de Egipto, escrito hacia el 1.650 a.C. y que pasa por ser la mayor fuente de conocimiento de la matemática egipcia. En Occidente tuvieron que pasar muchos siglos hasta que los musulmanes introdujeron su sistema de numeración, conocido como indo arábigo. Este paso fue clave para la comprensión y el estudio de los números racionales en la vieja Europa. Sin embargo, no fue hasta el S. XIII cuando Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, introdujo el concepto de números quebrados o números “ruptus”, empleando además la raya para separar el numerador del denominador (vínculo)

El concepto o la idea de número irracional aparecieron pronto en la geometría. Ya los antiguos griegos observaron que los números racionales no completaban la recta. Quizás el primero en constatarlo fue el célebre filósofo y matemático griego Pitágoras de Samos (582 a.C.–507 a.C.), quien estudiando un triángulo rectángulo con catetos de longitud uno, observó que la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo no podía tener un valor racional. Con esto demostró la no completitud de los números racionales y dedujo la existencia de unos números hasta entonces desconocidos. La Escuela Pitagórica llamó a dichos números inconmensurables. Al principio la aparición de estos “desconocidos” desconcertó de forma alarmante a los miembros de la Escuela Pitagórica, pues la existencia de los irracionales ponía en evidencia que muchas suposiciones y demostraciones de la geometría eran falsas o estaban incompletas. La sorpresa y preocupación llegó hasta tal punto que llegaron a plantearse el mantener en secreto estos números que contradecían su doctrina, que entre otras cosas preconizaba “la adoración del número como ente perfecto que gobernaba el universo y todo lo que en él existía”.

Tres siglos después de su descubrimiento, Euclides trata en su obra “Los Elementos” el tema de los números irracionales, y llega a demostrar que la raíz cuadrada de dos no puede ser un número racional. Los matemáticos griegos posteriores estudiaron además de estos irracionales sencillos, otros cada vez más complicados, encontrándose tipos como raíz cuadrada de (raíz cuadrada de a + raíz cuadrada de b) y otros semejantes, pero nunca llegaron a tener la idea general de número irracional. Esta idea aparece ya bien entrado el siglo S. XVI, al considerar la idea de un número decimal aperiódico, esto es un número decimal cuyas cifras se sucedían de manera indefinida sin obedecer a ley alguna determinada.

Los números racionales son suficientemente buenos para la mayoría de las operaciones que realizamos cotidianamente; sin embargo, ya desde los pitagóricos, en el siglo V a. de C, se dieron cuenta de que con una regla y un compás se podía construir segmentos cuya longitud no se podía expresar como cociente de dos enteros. Por ejemplo, en el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1. La hipotenusa mide $\sqrt{2}$ y este número no se puede escribir en la forma $\frac{a}{b}$ con a y b enteros; es decir, no es un número racional.

Tomado de https://es.scribd.com/document/375647436/Historia-de-Los-Numeros-Racionales-e-Irracionales

Una definición formal:

En matemáticas, un número irracional es un número que no puede ser expresado como una fracción $\frac{a}{b}$, donde a y b sean enteros y b sea diferente de cero. Es cualquier número real que no es racional, y su expresión decimal no es ni exacta ni periódica.

Un *decimal infinito* (es decir, con infinitas cifras) *aperiódico*, como $\sqrt{7} = 2{,}645751311064591$ no puede representar un número racional. A tales números se les nombra "números irracionales". Esta denominación significa la imposibilidad de representar dicho número como *razón* de dos números enteros. El número pi (π), el número e y el número áureo (φ) son otros ejemplos de números irracionales. Estos son:

Tomado de https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_irracional

Números irracionales famosos

Pi es un número irracional famoso. Se han calculado más de un millón de cifras decimales y sigue sin repetirse. Los primeros son estos:

3,1415926535897932384626433832795 (y sigue...)

El número *e* (el número de Euler) es otro número irracional famoso. Se han calculado muchas cifras decimales de *e* sin encontrar ningún patrón. Los primeros decimales son:

2,7182818284590452353602874713527 (y sigue...)

La razón de oro es un número irracional. Sus primeros dígitos son:

1,61803398874989484820... (y más...)

Muchas raíces cuadradas, cúbicas, etc. también son irracionales. Ejemplos:

√3	1,7320508075688772935274463415059 …
√99	9,9498743710661995473447982100121 …

Pero √4 = 2, y √9 = 3, así que no todas las raíces son irracionales.

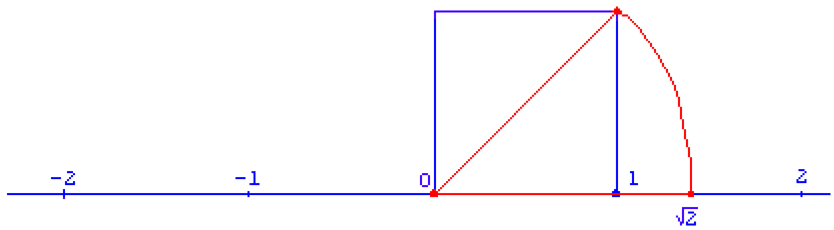
Tomado de http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/numeros-irracionales.html

REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Representemos en la recta numérica el valor (punto exacto de ubicación) del irracional $\sqrt{2}$

1. Levanta sobre la recta un cuadrado cuyo lado sea el segmento unidad entre el 0 y el 1. Según el teorema de Pitágoras, la diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2}$
2. Utiliza un compás para trasladar esa diagonal sobre la recta. El punto de corte del arco del compás sobre la recta representa el número $\sqrt{2}$

Fíjate en la siguiente figura y dibújala en tu cuaderno.



Tomado de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Representacion_en_la_recta/Numeros3.htm

De manera similar podemos representar la ubicación de número irracional $\sqrt{3}$

Construimos un rectángulo cuya base sea $\sqrt{2}$ y altura 1, como vemos podemos utilizar la representación anterior de $\sqrt{2}$ para representar a $\sqrt{3}$, ya que según el teorema de Pitágoras:

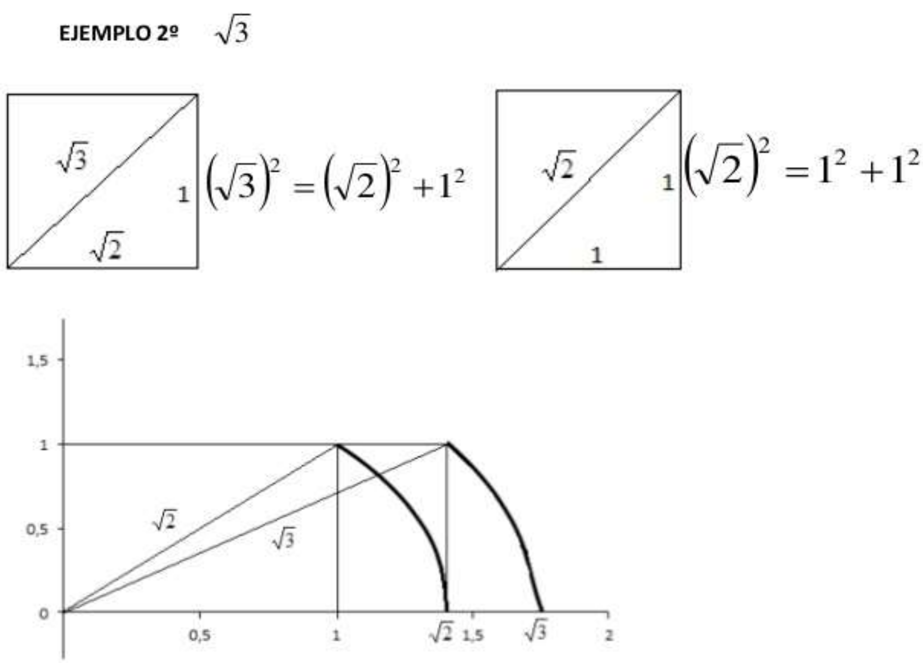
$$\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1 = h^2$$

$$\sqrt{2+1} = h$$

$$\sqrt{3} = h$$

Realizamos un proceso similar llevando el valor de la hipotenusa sobre la recta y se obtiene la ubicación del valor de $\sqrt{3}$

Veamos:



¿Cuál sería la representación de $\sqrt{4}$?

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE.

ACTIVIDAD 11

1. Representa en la recta cada irracional dado, aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de diagonal que representa dicho número.
   A) $\sqrt{5}$
   B) $2\sqrt{6}$
   C) $\sqrt{10}$
   D) $\sqrt{18}$
   E) $\sqrt{27}$

CONTENIDOS, TEMAS O TEORÍAS.

TEMA 12. EL CONJUNTO DE NÚMEROS REALES ($\mathbb{R}$)

El concepto de **números reales** surgió a partir de la utilización de fracciones comunes por parte de los egipcios, cerca del año **1.000 a.C**. El desarrollo de la noción continuó con los aportes de los griegos, que proclamaron la existencia de los números irracionales.

Los números reales son los que pueden ser expresados por un número entero (3, 28, 1568) o decimal (4,28; 289,6; 39985,4671). Esto quiere decir que abarcan a los números racionales (que pueden representarse como el cociente de dos enteros con denominador distinto a cero) y los números irracionales (los que no pueden ser expresados como una fracción de números enteros con denominador diferente a cero).
Otra clasificación de los números reales puede realizarse entre números algebraicos (un tipo de número complejo) y números trascendentes (un tipo de número irracional).
Más concretamente nos encontramos con el hecho de que los números reales se clasifican en números racionales e irracionales. En el primer grupo se encuentran a su vez dos categorías: los enteros, que se dividen en tres grupos (naturales, 0, enteros negativos), y los fraccionarios, que se subdividen en fracción propia y en fracción impropia. Todo ello sin olvidar que dentro de los citados naturales también hay tres variedades: uno, naturales primos y naturales compuestos.

En el segundo gran grupo anteriormente citado, el de los números irracionales, nos encontramos a su vez que existen en su seno dos clasificaciones: irracionales algebraicos e intrascendentes.

Dentro de la Ingeniería se hace especialmente uso de los citados números reales y en ella se parte de una serie de ideas claramente delimitadas como serían las siguientes: los números reales son la suma de los racionales y los irracionales, el conjunto de los reales puede definirse como un conjunto ordenado y este se puede representar mediante una recta en la que cada punto de la misma representa a un número concreto.

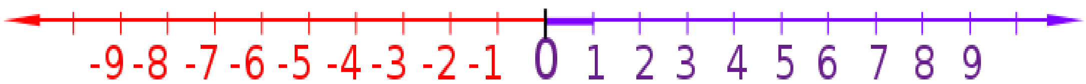
Es importante tener en cuenta que los números reales permiten completar cualquier tipo de operación básica con dos excepciones: las raíces de orden par de los números negativos no son números reales (aquí aparece la noción de número complejo) y no existe la división entre cero (no es posible dividir algo entre nada).

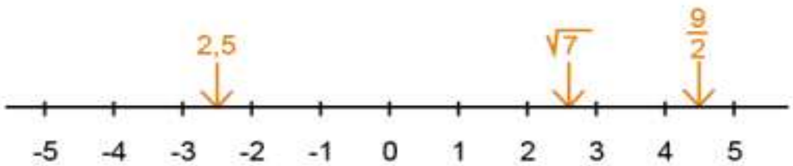
Esto supone que con los mencionados números reales podamos acometer operaciones tales como las sumas (interna, asociativa, conmutativa, de elemento opuesto, de elemento neutro…) o las multiplicaciones.

Tomado de https://definicion.de/numeros-reales/

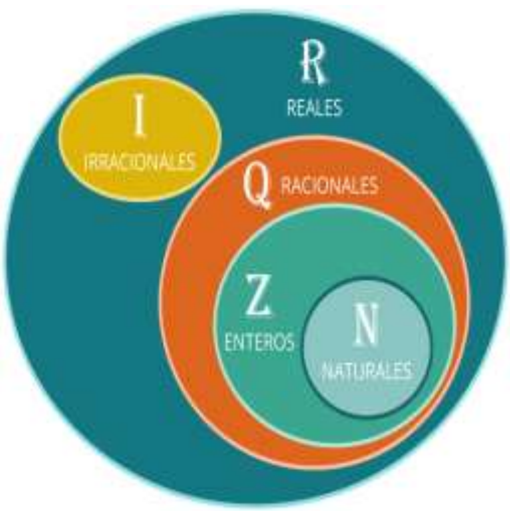
LA RECTA REAL

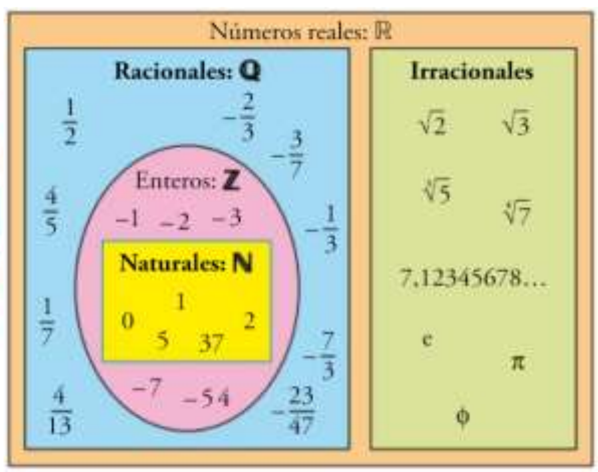
La recta numérica o recta real es un gráfico unidimensional o línea recta la cual contiene todos los números reales ya sea mediante una correspondencia para representar los números como puntos especialmente marcados, por ejemplo los números enteros mediante una recta llamada recta graduada entera[1] ordenados y separados con la misma distancia.





En el siguiente esquema podemos observar la composición de los conjuntos numéricos vistos





Ejemplos: analicemos los números -2, 4,5 y $\sqrt{5}$ y clasifiquémoslos su naturaleza:

Número	Natural N	Entero Z	Racional Q	Irracional Q*	Real R
4,5	no	No	Si	no	si
-2	no	Si	Si	no	Si
$\sqrt{5}$	no	No	No	si	Si

ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE.

ACTIVIDAD 12

1. Completa la siguiente tabla estableciendo la naturaleza de cada número dado.

Número	Natural N	Entero Z	Racional Q	Irracional Q*	Real R
-1					
0					
-3,6					
$5,\overline{7}$					
2,456789…					
π					
$\sqrt{7}$					
$\frac{4}{3}$					
5					
0,1					
$\sqrt{-9}$					

¿A qué conjunto pertenecen los números de tipo $\sqrt{-9}$?

2. Representa los siguientes números reales un una solo recta y luego ordénalos de menor a mayor: 0,- $\frac{3}{2}$, -9, $\sqrt{3}$; 4,7; -9,8; 3; $\sqrt{5}$; -1; $\sqrt{10}$; $\frac{5}{2}$.
3. Responde falso o verdadero
   A) Todo número entero es Real ____
   B) Todo natural es entero___
   C) Existen naturales que son irracionales____
   D) Todos los enteros son racionales___
   E) Un número entero puede ser natural ___
   F) Existen reales que no son naturales____
   G) Un número real puede ser irracional____
   H) Todo número real puede ser racional ____